詳細解答

STEP III 1989，第 5 題

純數學 • 切比雪夫多項式

> **STEP III 1989，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q5

關鍵思路

設 $x = \cosh\theta$。這樣 $e^{\pm\theta}$ 正好就是 $x \pm \sqrt{x^2-1}$，而 $y = \cosh n\theta$ 是它們的 n 次冪的平均值。用二項式定理（binomial theorem）展開這些冪，$\sqrt{x^2-1}$ 的奇次冪會互相抵消，餘下的就是 x 的多項式（polynomial）。只要把這個多項式寫成整齊的形式，每個係數（coefficient）不過是幾個二項式係數（binomial coefficient）之和。

解答

閉合形式

設 $\theta = \cosh^{-1} x$，則 $\theta \geq 0$ 且 $x = \cosh\theta$。於是 $\sinh\theta \geq 0$ 而 $\sinh^2\theta = x^2 - 1$，所以 $\sinh\theta = \sqrt{x^2-1}$。因此

$$e^{\theta} = \cosh\theta + \sinh\theta = x + \sqrt{x^2-1}, \qquad e^{-\theta} = \cosh\theta - \sinh\theta = x - \sqrt{x^2-1}.$$

故此

$$y = \cosh n\theta = \frac{e^{n\theta} + e^{-n\theta}}{2} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2},$$

這正是所要證明的結果。

為何 y 是奇多項式

記 $s = \sqrt{x^2-1}$。由二項式定理，

$$(x+s)^n + (x-s)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} s^j (1 + (-1)^j) = 2 \sum_{j \text{ 為偶數}} \binom{n}{j} x^{n-j} s^j.$$

s 的奇次冪互相抵消，而每個偶次冪 $s^{2m} = (x^2-1)^m$ 都是 x 的多項式。所以

$$y = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2m} x^{n-2m}(x^2-1)^m.$$

現在取 $n = 2k+1$，則 m 由 0 取到 k。每一項都是奇次冪 $x^{2k+1-2m}$ 乘以一個 x^2 的多項式，所以只含 x 的奇次冪，其中最高的是 x^{2k+1}。因此 $y = a_0x + a_1x^3 + \cdots + a_kx^{2k+1}$。

要讀出各係數，設 $j = k-m$（即 $j = 0,\ldots,k$），並利用 $\binom{2k+1}{2k-2j} = \binom{2k+1}{2j+1}$：

$$y = \sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j+1} x^{2j+1}(x^2-1)^{k-j}.$$

指標為 j 的那一項由 x^{2j+1} 開始。所以 x^{2r+1} 只來自 $j \le r$ 的各項，而在其中第 j 項，我們需要 $(x^2-1)^{k-j}$ 中的 $(x^2)^{r-j}$ 項，即 $\binom{k-j}{r-j}(-1)^{k-r}$。因此

$$a_r = (-1)^{k-r} \sum_{j=0}^{r} \binom{2k+1}{2j+1}\binom{k-j}{r-j}. \qquad (*)$$

a_0

當 $r = 0$ 時，只有 $j = 0$ 有貢獻：

$$a_0 = (-1)^k \binom{2k+1}{1} = (-1)^k(2k+1).$$

第 (i) 部分

當 $r = 1$ 時，$j = 0, 1$ 有貢獻：

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1)^{k-1}\left[(2k+1)\binom{k}{1} + \binom{2k+1}{3}\right] = (-1)^{k-1}(2k+1)\left[k + \frac{2k(2k-1)}{6}\right] \\ &= (-1)^{k-1}(2k+1)\,k\,\frac{3+2k-1}{3} = (-1)^{k-1}\,\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}, \end{aligned}$$

這正是所要證明的結果。

第 (ii) 部分

這裏需要 $k \ge 2$，x^5 才會出現。當 $r = 2$ 時，$j = 0, 1, 2$ 有貢獻：

$$a_2 = (-1)^k\left[(2k+1)\binom{k}{2} + \binom{2k+1}{3}\binom{k-1}{1} + \binom{2k+1}{5}\right].$$

每一項都有因子 $(2k+1)k(k-1)$；把它抽出，

$$\begin{aligned} a_2 &= (-1)^k(2k+1)k(k-1)\left[\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{3}+\frac{(2k-1)(2k-3)}{30}\right] \\ &= (-1)^k(2k+1)k(k-1)\,\frac{15+(20k-10)+(4k^2-8k+3)}{30} \\ &= (-1)^k(2k+1)k(k-1)\,\frac{4(k+1)(k+2)}{30} = (-1)^k\,\frac{2(k-1)k(k+1)(k+2)(2k+1)}{15}. \end{aligned}$$

處理第三項時，我們用了 $\binom{2k+1}{5} = \frac{(2k+1)(2k)(2k-1)(2k-2)(2k-3)}{120} = \frac{(2k+1)k(k-1)(2k-1)(2k-3)}{30}$。

想一想 我們的答案有一個因子 $(k+1)$，而 (ii) 中印出的公式卻沒有。哪一個才對？

用 $k=2$ 來檢驗。這時 $y=\cosh(5\theta)$，其中 $x=\cosh\theta$，而 $\cosh 5\theta = 16x^5-20x^3+5x$，所以 $a_2 = 16$。我們的公式給出 $2\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5/15 = 16$。印出的公式則給出 $2\cdot1\cdot2\cdot4\cdot5/15 = \frac{16}{3}$，這不可能正確，因為各個 a_r 都是整數。所以試卷有印刷錯誤：漏了因子 $(k+1)$。正確的結果就是上面所示的那一個。

係數之和

在多項式中代入 $x=1$。由於恆等式對 $x\geq 1$ 成立，而 $x=1$ 在容許範圍之內，

$$\sum_{r=0}^{k} a_r = y(1) = \cosh(n\cosh^{-1}1) = \cosh 0 = 1.$$

驗算

- $k=1$：$\cosh 3\theta = 4x^3-3x$。公式給出 $a_0=-3$ 和 $a_1 = 2\cdot1\cdot2\cdot3/3 = 4$，而 $-3+4=1$。
- $k=3$：$\cosh 7\theta = 64x^7-112x^5+56x^3-7x$。公式給出 $a_0=-7$、$a_1=56$ 和 $a_2 = -2\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot7/15 = -112$，而各係數之和為 1。
- 我們用電腦把 $(*)$ 與遞推關係（recurrence）$T_{m+1}=2xT_m-T_{m-1}$ 對照，檢驗了所有 $k\leq 14$ 的情況，並在隨機選取的 $x\geq 1$ 處把多項式與 $\cosh(n\cosh^{-1}x)$ 作比較。

常見錯誤

- 忘記了 x^{2r+1} 的係數來自展開式中的好幾項，而不只是一項。
- 正負號出錯：a_r 的每一項貢獻都帶有相同的符號 $(-1)^{k-r}$，所以應先把它抽出。

- 硬要把代數運算湊成 (ii) 中印出的形式。只要檢驗一個小的情況，例如 $k = 2$，便知道那是印錯了的。

STEP 之外

多項式 y 就是切比雪夫多項式（Chebyshev polynomial）$T_n(x)$，通常以 $T_n(\cos\phi) = \cos n\phi$ 來定義。我們的雙曲函數（hyperbolic function）版本是同一個恆等式在 $x \geq 1$ 時的情形，而兩者一致，是因為多項式由它在任何一個區間上的值完全確定。切比雪夫多項式在逼近論（approximation theory）中佔有核心地位，因為在所有 n 次首一多項式（monic polynomial）之中，$2^{1-n}T_n$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大絕對值是最小的。在任何數值分析（numerical analysis）的入門課程中，它們都會再次出現。如果想多做一些這類代數運算的 STEP 式練習，可以試試 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 進階數學題集）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。