詳細解答

# STEP III 1989，第 4 題

純數學 • 曲線描繪與根

> **STEP III 1989，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q4

## 關鍵思路

把分式拆成多項式加一個真分式（proper fraction），斜漸近線（oblique asymptote）便立刻出現，求導數（derivative）也變得容易。結果發現導數處處大於 2，所以三段分支各自由 $-\infty$ 一直上升到 $+\infty$。題目後半部的每一條方程，其實都是「曲線 = 某條較簡單的曲線」的變相寫法。兩者之差在每段分支上的嚴格單調性（strict monotonicity），便能準確數出交點的數目。

## 解答

### 曲線

由於 $2x(x^2-5) = 2x(x^2-4) - 2x$，

$$y = 2x - \frac{2x}{x^2-4}.$$

這個函數是奇函數（odd function），所以曲線關於原點有 2 階旋轉對稱（rotational symmetry）。曲線只在 $x(x^2-5) = 0$ 之處與坐標軸相交，即 $x = 0$ 及 $x = \pm\sqrt{5}$。

**漸近線**。分母在 $x = \pm 2$ 時為零（此時分子為 $\mp 4 \neq 0$），所以 $x = 2$ 和 $x = -2$ 是鉛垂漸近線（vertical asymptote）。當 $|x| \to \infty$ 時，$\frac{2x}{x^2-4} \to 0$，所以 $y = 2x$ 是斜漸近線。此外，$y - 2x = -\frac{2x}{x^2-4}$ 在 $x$ 為很大的正數時是負的，在 $x$ 為很大的負數時是正的。因此曲線在右方從下方趨近 $y = 2x$，在左方則從上方趨近。

**斜率**。對拆開後的式子求導，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 - \frac{2(x^2-4) - 2x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = 2 + \frac{2(x^2+4)}{(x^2-4)^2} > 2.$$

所以曲線沒有駐點（stationary point），而 $y$ 在 $x<-2$、$-2<x<2$ 和 $x>2$ 這三個區間上各自嚴格遞增。再求導一次，得 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\dfrac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$，所以唯一的拐點（point of inflection）是原點。

**原點處的切線**。在 $x=0$ 處斜率為 $2+\frac{2\cdot4}{16}=\frac{5}{2}$，所以該處的切線（tangent）是

$$y=\tfrac{5}{2}x.$$

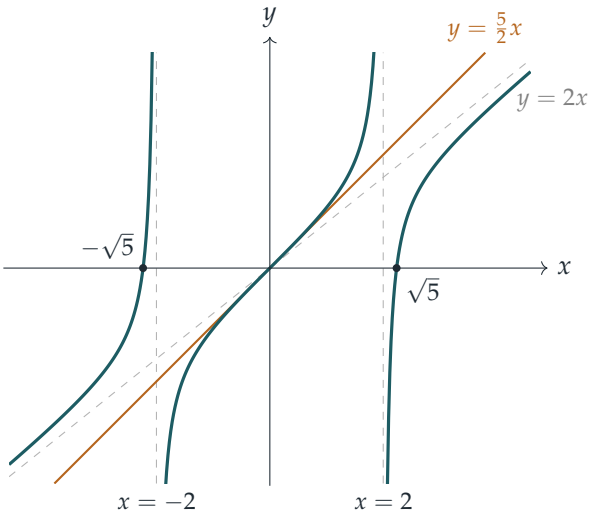
**在 $x=\pm2$ 附近的性態**。在 $x=2$ 附近，$-\frac{2x}{x^2-4}$ 這一項起主導作用。當 $x\to2^+$ 時它趨向 $-\infty$，當 $x\to2^-$ 時趨向 $+\infty$；由對稱性，當 $x\to-2^-$ 時它趨向 $+\infty$，當 $x\to-2^+$ 時趨向 $-\infty$。因此：

- 當 $x<-2$ 時，$y$ 由 $-\infty$ 上升至 $+\infty$，並在 $-\sqrt{5}$ 處穿過橫軸；
- 當 $-2<x<2$ 時，$y$ 由 $-\infty$ 上升至 $+\infty$，並經過原點；
- 當 $x>2$ 時，$y$ 由 $-\infty$ 上升至 $+\infty$，並在 $\sqrt{5}$ 處穿過橫軸。

還有一個事實稍後會用得着。當 $0<x<2$ 時，

$$y-\tfrac{5}{2}x=\frac{x\left[4(x^2-5)-5(x^2-4)\right]}{2(x^2-4)}=\frac{-x^3}{2(x^2-4)}>0,$$

所以在這一段上，曲線位於原點處切線的上方（由對稱性，當 $-2<x<0$ 時則位於切線下方）。



### 第 (i) 部分

$x = 0$（左邊為 0，右邊為 8）和 $x = \pm 2$（左邊為 $-16$，右邊為 0）都不是根。所以我們可以除以 $2x(x^2 - 4)$，方程變成

$$\frac{2x(x^2-5)}{x^2-4} = \frac{5x-2}{2x} = \frac{5}{2} - \frac{1}{x}.$$

因此，方程的根就是曲線與雙曲線（hyperbola）$H\colon y = \frac{5}{2} - \frac{1}{x}$ 各交點的 $x$-坐標。我們逐段分支來看。

- $x < -2$：這裏 $H$ 的斜率為 $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{4}$，而曲線的斜率 $> 2$。所以兩者之差（曲線 $-$ $H$）嚴格遞增。當 $x \to -\infty$ 時它趨向 $-\infty$，當 $x \to -2^-$ 時趨向 $+\infty$，因為 $H$ 一直介乎 $\frac{5}{2}$ 與 3 之間。恰有一個根。
- $-2 < x < 0$：曲線上 $y < 0$（三個因子 $x$、$x^2 - 5$、$x^2 - 4$ 全是負的），但 $H$ 上 $y > \frac{5}{2}$。沒有根。
- $0 < x < 2$：由上面的事實，$y > \frac{5}{2}x$。另外

  $$\tfrac{5}{2}x - \left(\tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{x}\right) = \frac{5x^2 - 5x + 2}{2x} > 0,$$

  因為 $5x^2 - 5x + 2$ 的判別式（discriminant）為 $25 - 40 < 0$。所以曲線嚴格位於 $H$ 的上方。沒有根。
- $x > 2$：與第一種情況一樣，兩者之差嚴格遞增（斜率 $> 2 - \frac{1}{4}$）。它由 $-\infty$ 走到 $+\infty$，因為 $H$ 一直介乎 2 與 $\frac{5}{2}$ 之間。恰有一個根。

所以方程 (i) 恰有**兩**個實根，一個小於 $-2$，一個大於 2。

**想一想** (ii) 的方程兩邊都有平方，怎樣才能從曲線上把它讀出來？

除以 $(x^2 - 4)^2$。左邊變成 $y^2$，所以方程說的是 $y^2 = x^2 + 1$。

### 第 (ii) 部分

同樣，$x = \pm 2$ 不是根（左邊為 16，右邊為 0）。所以方程就是 $y^2 = x^2 + 1$，其中 $y$ 是曲線的縱坐標（ordinate）。方程的根就是曲線與等軸雙曲線（rectangular hyperbola）$y^2 - x^2 = 1$ 的兩支 $y = \pm\sqrt{x^2+1}$ 的交點。

**上支**。設 $f(x) = y - \sqrt{x^2+1}$。則

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} > 2 - 1 > 0,$$

所以 $f$ 在三個區間上各自嚴格遞增。在每個區間上，$y$ 由 $-\infty$ 走到 $+\infty$，而 $\sqrt{x^2+1}$ 保持有限（它的增長只與 $|x|$ 相若，而當 $x \to +\infty$ 時對手是 $2x$；當 $x \to -\infty$ 時，$f$ 的兩項都是負的）。所以 $f$ 由 $-\infty$ 走到 $+\infty$，每個區間上恰有一個根：合共三個。

**下支**。映射 $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ 把曲線映到自身，並把下支映到上支。所以曲線與下支也恰有三個交點。

這兩組根不會重疊：對同一個 $x$，曲線只有一個 $y$，它不可能既正又負。所以方程 (ii) 恰有**六**個實根。（作為驗算，它是一條 6 次多項式方程，即 $3x^6 - 33x^4 + 92x^2 - 16 = 0$，所以它的根全是實數。）

? **想一想** (iii) 的變量是 $z$ 而不是 $x$，而且 $z$ 可能是負數。怎樣才能把曲線用上？

當 $z > 0$ 時，我們令 $z = x^2$，其中 $x > 0$。至於 $z \le 0$ 的情況，則另外直接處理。

### 第 (iii) 部分

左邊永不為負，所以任何根都必須滿足 $z + 1 \ge 0$，即 $z \ge -1$。另外 $z = 0$ 不是根（左邊為 0，右邊為 16），$z = 4$ 也不是（左邊為 64，右邊為 0）。

**滿足 $z > 0$ 的根**。令 $z = x^2$，其中 $x > 0$，使每個正根 $z$ 恰好對應一個 $x > 0$。方程變成 $4x^4(x^2-5)^2 = (x^2-4)^2(x^2+1)$。除以 $x^2(x^2-4)^2$ 得

$$y^2 = 1 + \frac{1}{x^2}, \qquad \text{即} \qquad y = \pm s(x), \quad s(x) = \sqrt{1 + x^{-2}}.$$

這裏 $s$ 由 $+\infty$（當 $x \to 0^+$）遞減至 1（當 $x \to \infty$），而 $s'(x) = -\dfrac{1}{x^3\sqrt{1+x^{-2}}}$，所以 $|s'(x)| < \frac{1}{x^3}$。

- $y = s(x)$：函數 $y - s$ 的導數為 $y' - s' > 2$。在 $(0, 2)$ 上，它由 $-\infty$（因為 $y \to 0$ 而 $s \to \infty$）走到 $+\infty$。在 $(2, \infty)$ 上，它同樣由 $-\infty$ 走到 $+\infty$。每個區間上各有一個根，所以共有兩個根。
- 在 $(0, 2)$ 上的 $y = -s(x)$：曲線在那裏滿足 $y > 0 > -s$。沒有根。
- 在 $(2, \infty)$ 上的 $y = -s(x)$：函數 $y + s$ 的導數為 $y' + s' > 2 - \frac{1}{8} > 0$，並由 $-\infty$ 走到 $+\infty$。有一個根。

所以恰有三個正根 $z$。

**滿足 $-1 \le z < 0$ 的根**。寫 $z = -t$，其中 $0 < t \le 1$。方程變成

$$4t^2(t+5)^2 = (t+4)^2(1-t).$$

在 $(0, 1]$ 上，左邊嚴格遞增，由 0（當 $t \to 0$）增至 144。右邊嚴格遞減，由 16 減至 0。兩者之差嚴格遞增並且變號，所以恰有一個根。

因此方程 (iii) 恰有**四**個實根：三個正根，另一個在 $(-1,0)$ 內。展開後，它是四次方程（quartic）$4z^4-41z^3+107z^2-8z-16=0$，所以它的四個根全是實數。

## 驗算

- 在 $x=1000$ 處，$y-2x\approx -0.002$，印證了曲線是從下方趨近 $y=2x$。
- 用數值計算，(i) 的根為 $x\approx -2.143$ 和 $2.401$，一如所料，外側兩段分支上各有一個。
- (ii) 的根為 $x\approx \pm 0.431,\ \pm 2.155,\ \pm 2.484$，對雙曲線的每一支而言，曲線的每段分支上各有一個。
- (iii) 的根為 $z\approx -0.332,\ 0.473,\ 4.799,\ 5.310$。後三個給出 $x=\sqrt{z}\approx 0.688,\ 2.191,\ 2.304$，曲線上相應的值為 $y\approx 1.77,\ -1.10,\ 1.09$，與分情況討論的結果吻合。

## 常見錯誤

- 沒有先檢查 $x=0$ 和 $x=\pm 2$ 不是根，就除以 $x$ 或 $x^2-4$。
- 在 (ii) 中，只數與 $y=+\sqrt{x^2+1}$ 的交點而忘記了下支，結果得出 3 而不是 6。
- 在 (iii) 中，代入 $z=x^2$ 而忘記了 $z$ 可以是負數，因而漏掉 $(-1,0)$ 內的根。

## STEP 之外

這裏的計數論證，建基於介值定理（intermediate value theorem，即變號的連續函數必有零點），再加上嚴格單調性（零點最多只有一個）。把這兩個事實嚴格地建立起來，是大學分析課程最先要做的工作之一。Abbott 的 *Understanding Analysis* 對兩者都有細緻而易讀的論述。笛卡兒（Descartes）符號法則（rule of signs）和施圖姆（Sturm）序列是數算多項式實根數目的代數方法，與這裏所用的幾何方法對照起來，相當有趣。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。