詳細解答

STEP III 1989，第 2 題

純數學 • 三維空間中的平面

> **STEP III 1989，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q2

關鍵思路

引入坐標：東、北和上。這樣每個平面都是一個圖像 $z = px + qy + r$，而三個點就能確定一個平面。平面有多陡，只取決於 z 沿水平方向變化得多快，所以所求的角可由 p 和 q 得出。第二部分有一條巧妙的捷徑：礦層在地面以下的深度同樣是位置的線性函數（linear function），而礦層恰好在深度為零之處露出地面。

解答

建立坐標

取 A 為原點，x 軸指向東，y 軸指向北，z 軸鉛垂向上（所有長度以米為單位）。於是

$$A = (0,0,0), \qquad B = (0,100,-5), \qquad C = (60,100,-10),$$

因為 B 比 A 低 5 m，而 C 又比 B 再低 5 m。鑽孔（bore-hole）是鉛垂的，所以鑽孔碰到礦層（seam）的點就在這些點的正下方：

$$A' = (0,0,-95), \qquad B' = (0,100,-50), \qquad C' = (60,100,-86).$$

礦層的傾角

礦層並非鉛垂，因為 A', B', C' 位於三個在平面圖（plan）上不共線（collinear）的點的上方。所以我們可以把它寫成 $z = px + qy + r$。

- 在 A'：$r = -95$。
- 由 A' 到 B'，y 增加 100，z 增加 45，所以 $100q = 45$，即 $q = \frac{9}{20}$。

► 由 B' 到 C'，x 增加 60，z 的變化為 -36，所以 $60p = -36$，即 $p = -\frac{3}{5}$。

因此礦層為

$$z = -\tfrac{3}{5}x + \tfrac{9}{20}y - 95,$$

它的一個法向量（normal vector）是 $\mathbf{n} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{9}{20}, 1\right)$，或者乘以 20 後得 $(12, -9, 20)$。

兩個平面之間的夾角等於它們的法線之間的夾角。水平面的法向量是 $\mathbf{k} = (0,0,1)$，所以礦層與水平面的夾角 θ 滿足

$$\cos\theta = \frac{|(12,-9,20)\cdot(0,0,1)|}{\sqrt{12^2+9^2+20^2}} = \frac{20}{\sqrt{144+81+400}} = \frac{20}{\sqrt{625}} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

故此礦層與水平面的傾角為 $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$，正如題目所求。

（另一個看法：沿最大斜率線（line of greatest slope），水平方向每走一米，z 的變化為 $\sqrt{p^2+q^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{81}{400}} = \frac{3}{4}$。所以 $\tan\theta = \frac{3}{4}$，是一個 3–4–5 三角形，於是 $\cos\theta = \frac{4}{5}$。）

礦層在何處露出地面

地面是一個通過原點的平面。與之前的做法一樣，由 A 向北走到 B，地面每 100 下降 5；由 B 向東走到 C，地面每 60 下降 5，所以

$$z = -\tfrac{1}{12}x - \tfrac{1}{20}y.$$

想一想 我們真的需要聯立求解兩個平面方程嗎？

不盡然。設 $d(x,y)$ 為在水平位置 (x,y) 處礦層在地面以下的深度。它是兩個線性函數之差，所以本身也是線性的：

$$d(x,y) = \left(-\tfrac{1}{12}x - \tfrac{1}{20}y\right) - \left(-\tfrac{3}{5}x + \tfrac{9}{20}y - 95\right) = \tfrac{31}{60}x - \tfrac{1}{2}y + 95.$$

作為驗算，$d(0,0) = 95$、$d(0,100) = 45$ 及 $d(60,100) = 45 + 31 = 76$，正是三個鑽孔的深度。（其實我們可以直接由這些數據寫出 d：向北每走 100 m，深度減少 50；向東每走 60 m，深度增加 31。）

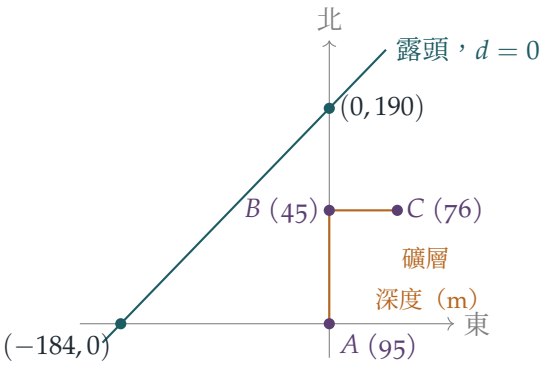
礦層在 $d = 0$ 之處露出地面，在平面圖上這是直線

$$\tfrac{31}{60}x - \tfrac{1}{2}y + 95 = 0, \qquad \text{即} \qquad y = \tfrac{31}{30}x + 190.$$

沿這條直線，每向東移動 30 m，就同時向北移動 31 m。所以這條直線與正北方向成角 φ，其中

$$\tan\varphi = \frac{\text{東}}{\text{北}} = \frac{30}{31}, \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\tfrac{30}{31}\right) \approx 44.06^\circ.$$

因此這條直線的方位角（bearing）是 $\tan^{-1}\left(\frac{30}{31}\right) \approx 044^\circ$。若從相反方向來讀，則是 224°；一條直線有這兩個方位角，用哪一個來描述它都可以。這條直線的走向略偏於東北方向以西，在平面圖上它通過 A 正北 190 m 處。



驗算

- 礦層的法向量 $(12, -9, 20)$ 的長度恰好是 25，所以 $\cos\theta = \frac{20}{25}$，是一個整齊的 3–4–5 答案，與題目所預告的一致。
- 深度公式 d 重現了全部三個鑽孔的深度，所以兩個平面都是對的。
- 數值上，$\tan^{-1}(30/31) = 44.0608°$。在直線 $y = \frac{31}{30}x + 190$ 上隨機取點，兩個平面給出的高度相同，只差捨入誤差。

常見錯誤

- 把每個鑽孔由孔口起計的深度直接拿來用，彷彿各孔口處於同一水平。B 和 C 分別比 A 低 5 m 和 10 m，所以在該兩處礦層位於 A 的水平以下 50 m 和 86 m，而不是 45 m 和 76 m。
- 給出礦層內一條水平線的方位角（即 $-\frac{3}{5}x + \frac{9}{20}y$ 為常數之處，方位角為 $\tan^{-1}\frac{3}{4} \approx 037°$），而不是露頭（outcrop）的方位角。由於地面也是傾斜的，兩者並不相同。
- 把 $\tan\varphi =$ 東/北 與北/東混淆。方位角是由北起順時針方向量度的。

STEP 之外

這是地質學家的「走向與傾角」（strike and dip）問題，所用的工具屬於大學一年級的向量幾何：以 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = c$ 表示平面、透過法線求平面之間的夾角，以及交線。深度這一招是一個普遍原理的例子：兩個仿射函數（affine function）之差仍是仿射函數，所以兩個不平行平面的交集就是某一個線性函數的零點集（zero set）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）把這幅圖像融入線性方程的幾何之中。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。