詳細解答

STEP III 1989，第 14 題

力學 • 滑輪與衝量

> **STEP III 1989，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q14

關鍵思路

第 (i) 部分：把圓盤切成許多薄圓環，每個圓環上的質量全都與圓心相距同一距離，因此質量和轉動慣量（moment of inertia）都只是對 r 的單一積分。第 (ii) 部分：整個系統只有一個自由度（degree of freedom），即 D 的深度，所以一條運動方程（equation of motion）便可求出加速度。當 B 突然被截停時，繩的約束（constraint）立刻告訴我們 D 此後可以運動得多快，而衝量（impulse）正是它的動量（momentum）的改變。

解答

第 (i) 部分

（第 (i) 部分所指的軸是通過圓心 O 的軸；試卷上的「C」是印刷錯誤。）設與 O 相距 r 處的密度為 $\rho = kr$，其中 k 為常數。半徑 r 與 $r + \mathrm{d}r$ 之間的薄圓環面積為 $2\pi r\,\mathrm{d}r$，故質量為 $2\pi kr^2\,\mathrm{d}r$，而且環上每一點與軸的距離都是 r。因此

$$m = \int_0^a 2\pi kr^2\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi ka^3}{3}, \qquad I = \int_0^a r^2 \cdot 2\pi kr^2\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi ka^5}{5}.$$

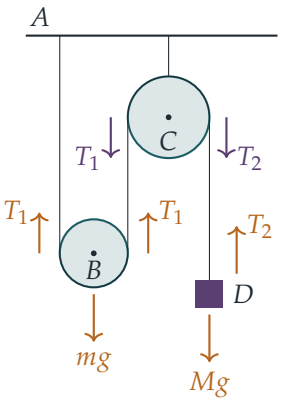
兩式相除，得 $I/m = \frac{3}{5}a^2$，所以

$$I = \tfrac{3}{5}ma^2,$$

這正是所要證明的結果。（它比均勻圓盤的 $\frac{1}{2}ma^2$ 大，這是合理的：較多的質量集中在邊緣附近。）

第 (ii) 部分：B 被截停前的運動

模型：B 是質量為 m 的光滑滑輪（pulley），C 是 (i) 中那種圓盤，質量為 m、半徑為 a，所以它繞其固定軸的轉動慣量是 $\frac{3}{5}ma^2$。繩是輕而不可伸長的，並且在 C 上不打滑。由於 B 是光滑的，AB 和 BC 兩段繩的張力（tension）T_1 相同。把 CD 段繩的張力記為 T_2；由於 C 是粗糙的，T_2 不一定等於 T_1。



設 D 以加速度 f 向下運動。支承 B 的兩段繩各自縮短的長度，是 CD 伸長量的一半，所以 B 以加速度 $\frac{1}{2}f$ 上升；又因為繩在 C 上不打滑，C 的角加速度（angular acceleration）是 f/a。運動方程為：

$$\begin{aligned} D\text{ (向下)}: &\quad Mg - T_2 = Mf, \\ B\text{ (向上)}: &\quad 2T_1 - mg = \tfrac{1}{2}mf, \\ C\text{ (對其軸取矩)}: &\quad (T_2 - T_1)a = \tfrac{3}{5}ma^2 \cdot \frac{f}{a}. \end{aligned}$$

把 $T_2 = Mg - Mf$ 和 $T_1 = \frac{1}{2}mg + \frac{1}{4}mf$ 代入最後一條方程，

$$Mg - Mf - \tfrac{1}{2}mg - \tfrac{1}{4}mf = \tfrac{3}{5}mf \quad\Longrightarrow\quad f\left(M + \tfrac{17}{20}m\right) = g\left(M - \tfrac{1}{2}m\right),$$

所以

$$f = \frac{10(2M - m)g}{20M + 17m}.$$

這是常數，而且正因為 $m < 2M$ 才是正數：題目給出這個條件，原因就在這裏。它說明 D 確實會由靜止開始下降。因此 t 秒後，D 向下運動的速率為

$$v = ft = \frac{10(2M - m)gt}{20M + 17m},$$

B 以 $\frac{1}{2}v$ 上升，而 C 以角速率 v/a 轉動。

（用能量驗算可得相同的 f：當 D 下降了 x 時，動能（kinetic energy）為 $\frac{1}{2}(M + \frac{1}{4}m + \frac{3}{5}m)\dot{x}^2$，而失去的勢能（potential energy）為 $(M - \frac{1}{2}m)gx$。）

第 (ii) 部分：衝量

> **想一想** B 被截停之後，D 還能運動嗎？

只要繩保持拉緊，D 的速率總是 B 的速率的兩倍，因為 A 是固定的，而 AB 和 BC 的長度每次都改變相同的量。一旦 B 靜止，這兩段的長度都固定了，於是再沒有繩可以繞過 C，D 也必須停下來，C 亦然。繩確實保持拉緊：D 正在遠離 C，所以它把 CD 拉緊；而仍在轉動的 C 則從 BC 一側把繩往上扯，所以那一段也被拉緊。（事實上，算出來的衝擊張力（impulsive tension）在 CD 中是 Mv，在 BC 中是 $(M+\frac{3}{5}m)v$，兩者皆為正數，印證了這一點。）

所以 D 的速度由向下的 v 降至零，而（繩）作用於 D 的衝量等於它的動量改變：

$$\text{衝量施於} D = Mv = \frac{10M(2M-m)gt}{20M+17m} \quad \text{，方向鉛垂向上。}$$

驗算

- 若 $m \to 0$（輕滑輪），則 $f \to g$，衝量為 Mgt：D 只是自由下落，一如所料。
- 若 $m = 2M$，衝量為零：系統處於平衡狀態，根本不會開始運動。
- 取 $M = 3$、$m = 2.5$、$g = 9.8$、$t = 1.3$，以數值方法逐步模擬運動，得 $Mv \approx 13.0507$，與公式吻合，而所得的動能亦與失去的勢能相符。用數值積分算出的轉動慣量比值是 0.6000。

常見錯誤

- 把 C 兩邊的張力當作相同。滑輪 C 有質量而且粗糙，正是兩邊張力之差令它轉動。
- 忘記 B 的速率只有 D 的一半；這使有效質量中出現的是 $\frac{1}{4}m$，而不是 m。
- 只給出衝量的大小而不說明方向：它向上作用於 D。

STEP 之外

用單一坐標把動能寫成 $\frac{1}{2}M_{\text{有效}}\dot{x}^2$，正是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）的起點；在那裏，像滑輪幾何這樣的約束從一開始就已內置，張力根本不會出現。像截停 B 這類突然施加的約束，也可用同樣的方法，以衝量方程處理。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）以這種風格講述剛體轉動（rigid-body rotation）和衝量。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。