詳細解答

STEP III 1989，第 13 題

力學 • 簡諧運動

STEP III 1989，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/89-s3-q13

關鍵思路

每條弦線都由 O（在桌面之下）出發，向上穿過所屬的小孔，再沿桌面連到 P。桌下的一段長度恆為 a，正好等於自然長度（natural length），所以每條弦線的伸長量（extension）就是 P 與該小孔之間的距離。這樣每個張力（tension）都與一個向量成正比；用位置向量（position vector）來表示，五個力只需一行便可加起來，因為五個小孔對稱排列，它們的位置向量之和為零。

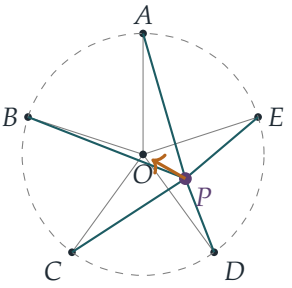
解答

建立模型

把 P 視為光滑桌面上的質點（particle），弦線視為輕彈性弦線（light elastic string），小孔視為光滑，因此每條弦線上各處的張力相同。取桌面上的 O 為原點，設 $\mathbf{r}$ 為 P 的位置向量，並設 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5$ 為 $A, \ldots, E$ 的位置向量，每個的長度均為 a。

穿過第 i 個小孔的弦線由兩段組成：一段是由 O（在桌面之下，位於中心的正下方）到小孔的垂直部分，長度為 a；另一段在桌面上，長度為 $|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$。弦線的總長度是 $a + |\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$，所以伸長量是 $|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$。這個量永不為負，因此無論 P 在哪裏，每條弦線都是拉緊的（或當 P 位於小孔時剛好鬆弛）：不會有弦線鬆掉而令方程改變。根據虎克定律（Hooke's law），張力為 $\frac{\lambda}{a}|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$，而在桌面上它把 P 拉向小孔，方向為單位向量 $\frac{\mathbf{a}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|}$。所以第 i 條弦線作用於 P 的力是

$$\frac{\lambda}{a}|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}| \cdot \frac{\mathbf{a}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|} = \frac{\lambda}{a}(\mathbf{a}_i - \mathbf{r}).$$



藍綠色的線是從上方俯視時桌面上的五條弦線；琥珀色箭頭表示作用於 P 的合力（resultant force），它正正指向 O。

第一部分

作用於 P 的垂直方向的力（重量與法向反作用力）互相平衡。把五個水平方向的力相加，

$$\mathbf{F} = \frac{\lambda}{a}\sum_{i=1}^{5}(\mathbf{a}_i - \mathbf{r}) = \frac{\lambda}{a}\Big(\sum_{i=1}^{5}\mathbf{a}_i\Big) - \frac{5\lambda}{a}\mathbf{r}.$$

? **想一想** 為甚麼 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 = \mathbf{0}$？

把整個圖形繞 O 旋轉 72°，五個小孔只是互相置換，所以總和 $\mathbf{s} = \sum \mathbf{a}_i$ 保持不變。但旋轉 72° 後仍然不變的向量只有零向量，所以 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$。（換句話說，五次單位根（fifth roots of unity）之和為零。）

因此由牛頓第二定律（Newton's second law）可得

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{5\lambda}{a}\mathbf{r}, \qquad \text{即} \qquad \ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2\mathbf{r} \quad \text{其中} \quad \omega^2 = \frac{5\lambda}{am}.$$

P 由 F 從靜止開始運動，所以 $\mathbf{r}(0) = \overrightarrow{OF}$ 及 $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{0}$。解為 $\mathbf{r} = \cos(\omega t)\,\overrightarrow{OF}$，所以 P 沿直線 FO 來回運動（去到 F 關於 O 的反射點再折返），而它相對於 O 的位移滿足簡諧運動（simple harmonic motion）的方程。週期（period）為

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{am}{5\lambda}},$$

這正是所需的結果。（注意這對任何起點 F 都成立，並不限於小位移：力的規律是完全線性的。）

最後部分

現在弦線 PAO 的彈性模量（modulus）為 $k\lambda$，所以它作用於 P 的力是 $\frac{k\lambda}{a}(\mathbf{a}_1-\mathbf{r})$。利用 $\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_5=-\mathbf{a}_1$，

$$\begin{aligned}\mathbf{F}&=\frac{k\lambda}{a}(\mathbf{a}_1-\mathbf{r})+\frac{\lambda}{a}\sum_{i=2}^{5}(\mathbf{a}_i-\mathbf{r})\\&=\frac{k\lambda}{a}(\mathbf{a}_1-\mathbf{r})+\frac{\lambda}{a}(-\mathbf{a}_1-4\mathbf{r})\\&=\frac{\lambda}{a}[(k-1)\mathbf{a}_1-(k+4)\mathbf{r}]=-\frac{(k+4)\lambda}{a}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),\qquad \mathbf{r}_0=\frac{k-1}{k+4}\mathbf{a}_1.\end{aligned}$$

所以平衡位置（equilibrium position）是 OA 上的點 $\mathbf{r}_0$（該處 $\mathbf{F}=\mathbf{0}$），並且

$$\ddot{\mathbf{r}}=-\frac{(k+4)\lambda}{am}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

若把 P 由 $\mathbf{r}_0$ 沿 OA 移開，然後從靜止釋放，則 $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ 起初與 $\mathbf{a}_1$ 平行，加速度又恆與 $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ 平行，而初速度為零。所以與之前完全一樣，$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=\cos(\omega' t)(\mathbf{r}(0)-\mathbf{r}_0)$：$P$ 沿 OA 作直線運動，以 $\mathbf{r}_0$ 為中心作簡諧運動，角頻率（angular frequency）為 ω'，其中

$$\omega'^2=\frac{(k+4)\lambda}{am}.$$

週期為 $T/2$，當且僅當 $\omega'=2\omega$，即 $\omega'^2=4\omega^2$：

$$\frac{(k+4)\lambda}{am}=\frac{20\lambda}{am}\quad\Longrightarrow\quad k+4=20\quad\Longrightarrow\quad k=16.$$

當 $k=16$ 時，平衡位置是 $\mathbf{r}_0=\frac{15}{20}\mathbf{a}_1$，即由 O 到 A 的四分之三處。（要令模型成立，振幅（amplitude）必須小於 $\frac{1}{4}a$，使 P 不會到達 A 處的小孔。）

驗算

- 代入 $k=1$ 便回到第一部分：$\mathbf{r}_0=\mathbf{0}$ 及 $\omega'^2=5\lambda/(am)$。
- 單位：λ 是一個力，所以 $\lambda/(am)$ 的單位是 $\mathrm{N}/(\mathrm{m\,kg})=\mathrm{s}^{-2}$，而 T 是時間。
- 我們在 1000 個隨機位置把五個張力向量相加（取 $a=1.3$、$m=0.7$、$\lambda=2.1$），結果恰好是 $-5\lambda\mathbf{r}/a$；而當 $k=16$ 時恰好是 $-20\lambda(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)/a$。由 $(0.4,-0.3)$ 出發，以數值方法逐步計算運動，P 在時間 $T\approx 1.85$ 後回到起點，並一直留在通過 O 的直線上；當 $k=16$ 時由 $\mathbf{r}_0+0.1a\,\hat{\mathbf{a}}_1$ 出發，則在 $T/2$ 後回到起點。

常見錯誤

- 把伸長量當作 $|\mathbf{a}_i-\mathbf{r}|-a$ 或 $|\mathbf{r}|$：自然長度 a 剛好全部用於桌下的那一段。

- 用角度和三角學來分解五個張力。這樣做是可以的，但用向量的話，各項一眼便可看出互相抵消。
- 假設新的振動仍以 O 為中心：較硬的弦線會把平衡位置拉向 A。

STEP 之外

二維空間中的力 $\mathbf{F} = -c\,\mathbf{r}$ 給出各向同性諧振子（isotropic harmonic oscillator）：一般的運動（初速度帶有橫向分量時）是以平衡點為中心的橢圓，而且每條軌道的週期都相同。它與平方反比定律（inverse-square law）是僅有的兩種令每條有界軌道都閉合的有心力（central force），這就是伯特蘭定理（Bertrand's theorem）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）正是以這種向量方式處理振子和有心力。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。