詳細解答

STEP III 1989，第 12 題

力學 • 旋轉參考系

> **STEP III 1989，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q12

關鍵思路

平面是光滑（smooth）的，而桿是輕（light）桿並可繞樞軸自由轉動，所以作用於 P 的水平力只能沿桿的方向。因此，P 的加速度在垂直於 AP 方向上的分量必定為零。只要求出這個分量，令它等於零，便得到關於 ϕ 的單擺方程（pendulum equation），再用慣常的「乘以 $\dot\phi$ 再積分」技巧，便可求出 $\dot\phi$。

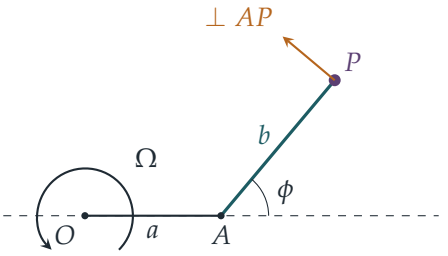
解答

模型與設定

把 P 看成光滑平面上的一個質點（particle），把桿看成輕而剛硬的桿，可繞 A 自由轉動。我們在一個固定的慣性參考系（inertial frame）中考慮問題。用複數表示平面上的位置，以 O 為原點，實軸取為 $t=0$ 時 OA 的方向，並取 $\Omega>0$ 為逆時針方向。由於 A 固定在平面上，它沿半徑為 a 的圓運動；而 AP 與 OA 的延長線成角 ϕ，該延長線本身已轉過 Ωt。因此，記 $\theta=\Omega t+\phi$，便有

$$z_A = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}, \qquad z_P = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

這裏 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 是沿 AP 方向的單位向量，而 $\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 是垂直於 AP、指向 ϕ 增加方向的單位向量。



加速度的垂直分量

求導，其中 $\dot\theta = \Omega + \dot\phi$ 及 $\ddot\theta = \ddot\phi$（因為 Ω 是常數），得

$$\dot z_P = \mathrm{i}a\Omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + \mathrm{i}b(\Omega+\dot\phi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$
$$\ddot z_P = -a\Omega^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + b(\mathrm{i}\ddot\phi - (\Omega+\dot\phi)^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

要把加速度分解為沿 AP 和垂直於它的分量，可寫 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\cos\phi - \mathrm{i}\sin\phi)$。於是

$$\ddot z_P = [-a\Omega^2\cos\phi - b(\Omega+\dot\phi)^2]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + [\,b\ddot\phi + a\Omega^2\sin\phi\,]\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

所以，P 的加速度在垂直於 AP 方向（指向 ϕ 增加的一方）的分量是

$$\boxed{\,b\,\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} + a\Omega^2\sin\phi\,}$$

（第一項是我們熟悉的 $b\ddot\phi$，來自繞 A 的圓周運動。第二項來自 A 本身指向 O 的向心加速度（centripetal acceleration）$a\Omega^2$，再分解到垂直於桿的方向。）

求 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$

? **想一想** 為甚麼加速度的這個分量必定為零？

作用於 P 的力有：它的重量和法向反作用力（normal reaction）（兩者都是鉛垂的，並且互相抵消）；沒有摩擦力（平面是光滑的）；以及桿所施的力。一根可繞 A 自由轉動的輕桿，只能沿自身的長度方向推或拉。所以在垂直於 AP 的方向上沒有水平力，由牛頓第二定律（Newton's second law）得

$$b\ddot\phi + a\Omega^2\sin\phi = 0.$$

這就是單擺方程。乘以 $\dot\phi$ 再積分，得

$$\tfrac{1}{2}b\dot\phi^2 = a\Omega^2\cos\phi + C.$$

初始條件。開始時 O, A, P 在同一直線上。由於 $b > a$，P 不可能位於 O 與 A 之間，我們取 P 在 A 之外的一方，所以在 $t = 0$ 時 $\phi = 0$。這時兩個指數函數的值都是 1，而

$$\dot{z}_P(0) = \mathrm{i}[(a+b)\Omega + b\dot{\phi}(0)],$$

它垂直於 OP（即實軸）。留意 $(a+b)\Omega$ 正是平面上位於 P 正下方那一點的速率，而 $b\dot{\phi}(0)$ 則是 P 相對於平面的速率。題目印出的速率是 $(a+2\sqrt{ab})\Omega$，但這看來是 $(a+b+2\sqrt{ab})\Omega = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\Omega$ 的誤印，因為後者才能得出題目所述的結果（見文末的備註）。採用這個值，P 相對於平面的速率是 $2\sqrt{ab}\,\Omega$，所以

$$\dot{\phi}(0) = 2\Omega\sqrt{a/b}.$$

把 $\phi = 0$ 代入能量方程，得 $\frac{1}{2}b \cdot 4a\Omega^2/b = a\Omega^2 + C$，所以 $C = a\Omega^2$，而

$$\tfrac{1}{2}b\dot{\phi}^2 = a\Omega^2(1+\cos\phi) = 2a\Omega^2\cos^2\tfrac{\phi}{2}, \qquad \text{所以} \qquad \dot{\phi}^2 = \frac{4a\Omega^2}{b}\cos^2\tfrac{\phi}{2}.$$

開始時 $\dot{\phi} > 0$，而 $\dot{\phi}$ 只有經過零才能改變正負號，這需要 $\cos\frac{\phi}{2} = 0$，即 $\phi = \pm\pi$。所以只要 $-\pi < \phi < \pi$，我們便取正根：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = 2\Omega\sqrt{\frac{a}{b}}\cos\frac{\phi}{2}}$$

P 永不越過 OA

> **想一想** ϕ 難道不可以慢慢爬升到 π，然後越過它嗎？

只有當 ϕ 是 π 的倍數時，P 才會在直線 OA 上（當 $\phi = \pi$ 時，它位於 O 之外、距離為 $b-a$ 的地方）。由於當 $0 \le \phi < \pi$ 時 $\dot{\phi} > 0$，ϕ 由 0 開始遞增，而回到這條直線上的唯一途徑就是到達 $\phi = \pi$。我們解出這個方程，從而證明這種情況永不發生。分離變數（separating the variables），並設 $k = \sqrt{a/b}$，得

$$\int_0^{\phi} \sec\tfrac{u}{2}\,\mathrm{d}u = 2k\Omega t \quad\Longrightarrow\quad \ln\Big(\sec\tfrac{\phi}{2} + \tan\tfrac{\phi}{2}\Big) = k\Omega t.$$

設 $s = \sin\frac{\phi}{2}$，則 $\sec\frac{\phi}{2} + \tan\frac{\phi}{2} = \frac{1+s}{\sqrt{1-s^2}} = \sqrt{\frac{1+s}{1-s}}$，所以左邊等於 $\frac{1}{2}\ln\frac{1+s}{1-s} = \operatorname{artanh} s$。因此

$$\sin\frac{\phi}{2} = \tanh\Big(\Omega t\sqrt{\tfrac{a}{b}}\Big).$$

對於每個 $t > 0$，右邊都嚴格介乎 0 與 1 之間，所以對所有 $t > 0$ 都有 $0 < \phi < \pi$。於是 P 始終嚴格地留在直線 OA 的同一側。當 $t \to \infty$ 時，它趨近這條直線（趨近 O 之外的那一點），但永遠不會到達，所以 P 永不越過 OA。 ■

（不解方程的做法：$\phi = \pi, \dot{\phi} = 0$ 是單擺方程的一個平衡點（equilibrium），而在它附近，$\psi = \pi - \phi$ 滿足 $\dot{\psi} \approx -k\Omega\psi$，所以 ψ 以指數形式衰減，永不為零。）

關於印出的速率的備註。如果我們按字面把速率取為 $(a+2\sqrt{ab})\Omega$，則 $\dot\phi(0) = (2k-1)\Omega$，而同樣的積分給出 $\dot\phi^2 = \Omega^2[(2k-1)^2 - 4k^2\sin^2\frac{\phi}{2}]$。這並不是一個簡潔的式子。這時 P 會繞 $\phi = 0$ 來回擺動（每擺一次都越過 OA 的延長線），如果 $b < 16a$；又或者轉足一整圈，越過 OA，如果 $b > 16a$。所以印出的數值不可能是出題者的原意。

驗算

- 令 $a = 0$，A 便落在 O 上，這時 $\dot\phi \equiv 0$：P 只是隨着平面以速率 $b\Omega$ 一起轉動。這是對的，因為初始速率變成了 $b\Omega$。
- 單位：$\Omega\sqrt{a/b}$ 是一個變率，所以它的單位是 s^{-1}，正如 $\dot\phi$ 應有的單位。
- 我們以數值方法（RK4）逐步求解 $b\ddot\phi = -a\Omega^2\sin\phi$，取 $a=1, b=3, \Omega=1.3$。在 $t=2$ 時，得出 $\phi \approx 2.2644$ 和 $\dot\phi \approx 0.6375$，與 $2\arcsin\tanh(\Omega t\sqrt{a/b})$ 和 $2\Omega\sqrt{a/b}\cos\frac{\phi}{2}$ 相符，準確至 10 位有效數字。在 $t=10$ 時，$\phi \approx 3.1394 < \pi$。

常見錯誤

- 忘記了參考系本身對 P 的初始速度所貢獻的 $(a+b)\Omega$，把題目給出的速率當成相對於平面的速率。
- 把 P 的加速度只寫成繞 A 作圓周運動的加速度。樞軸 A 本身也在加速，$a\Omega^2\sin\phi$ 這一項正是由此而來。
- 把 $a\Omega^2\sin\phi$ 的正負號弄錯。如果符號錯了，$\phi = 0$ 便會是不穩定的，這不符合物理實際，因為「離心」拉力是背向 O 的。

STEP 之外

從旋轉的平面上看，P 是一個單擺，懸掛在大小為 $a\Omega^2$、方向沿 OA 延長線的均勻「重力」之中。科里奧利力（Coriolis force）沿桿的方向作用，所以它不做功，可以不予考慮。題目的初始條件令運動恰好落在 分界線（*separatrix*）上：這是來回擺動與越過頂點之間的臨界情況，此時單擺需要無限長的時間才到達倒立位置。旋轉參考系（rotating frames）、虛擬力（fictitious forces）以及這類相平面（phase plane）圖像，可參閱 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（一本大學力學入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。