詳細解答

STEP III 1989，第 11 題

力學 • 球體的斜碰撞

> **STEP III 1989，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q11

關鍵思路

首先確定碰撞一刻的幾何關係：它決定了連心線（line of centres）的方向，其餘一切都由此而來。然後套用光滑（smooth）球體斜碰撞（oblique impact）而其中一個球受約束（constraint）時的標準方法。兩球之間的衝量（impulse）沿連心線作用。牛頓恢復定律（Newton's law of restitution）適用於沿該直線的速度分量。至於動量守恆（conservation of momentum），由於繩子或支點（pivot）本身也提供衝量，這裏並不成立；我們改用不受約束影響的那一條方程：有繩子時用 A 的水平動量，有桿時用對 O 的角動量（angular momentum）。

解答

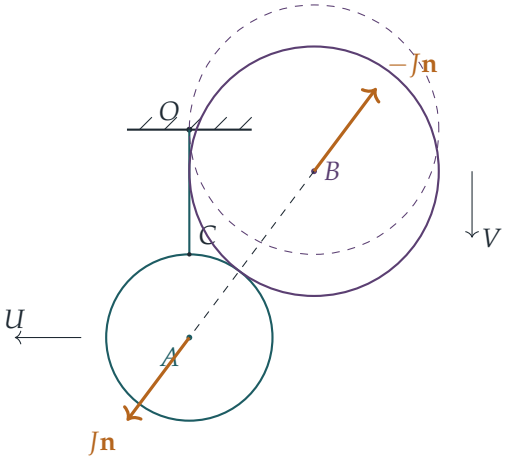
碰撞時的幾何關係

我們把兩個球都視為光滑而均勻（uniform），並把繩子視為輕而不可伸長（light and inextensible）。碰撞前繩子垂直懸掛。由於 C 位於直線 OA 上，我們有 $OA = 3a + 2a = 5a$，而 A 在 O 的正下方。

球 B 起初的位置使 $OB = 3a$ 為水平，然後垂直下落。設它下落的距離為 h。碰撞時兩球相切，所以 $AB = 2a + 3a = 5a$。A 與 B 的水平距離是 $3a$，所以兩者的垂直距離是 $\sqrt{25a^2 - 9a^2} = 4a$。因此 B 在 A 之上 $4a$ 處，亦即在 O 的水平線之下 a 處，故 $h = a$。

所以連心線構成一個 3–4–5 三角形：由 B 到 A，它沿水平方向（朝向 OA）走 $3a$，再向下走 $4a$。設 $\mathbf{n}$ 為由 B 指向 A 的單位向量（unit vector），並取 x 軸為水平，方向由 OA 指向 B。那麼

$$\mathbf{n} = \left(-\tfrac{3}{5}, -\tfrac{4}{5}\right).$$



虛線的球標示 B 的起始位置，實線的球則標示它在碰撞時的位置。

有繩子時的碰撞

設 J 為兩球之間衝量的大小，所以 A 受到 $J\mathbf{n}$，而 B 受到 $-J\mathbf{n}$。兩球都是光滑的，所以 $J\mathbf{n}$ 沿連心線作用，並通過 A。繩子的衝量沿 OC 作用，同樣通過 A。所以沒有任何東西令球 A 自轉，A 的運動就如同一個質點（particle），在以 O 為圓心、半徑為 $5a$ 的圓上運動。緊接碰撞之後繩子仍然垂直，所以 A 沿水平方向運動，速率為 U，方向為 x 的負方向。

*球 A，水平方向。*繩子不提供水平衝量，所以

$$3mU = \tfrac{3}{5}J, \qquad \text{即} \qquad J = 5mU.$$

（在垂直方向，繩子提供一個向上的衝量 $\frac{4}{5}J$，抵消了 $J\mathbf{n}$ 向下的部分。這個量是正數，所以繩子確實保持拉緊。）

*球 B。*碰撞前 $\mathbf{v}_B = (0, -V)$，它沿 $\mathbf{n}$ 的分量是 $\frac{4}{5}V$。衝量 $-J\mathbf{n}$ 只改變這個分量，並使它減少 $J/(25m)$：

$$\mathbf{v}'_B \cdot \mathbf{n} = \tfrac{4}{5}V - \frac{J}{25m} = \tfrac{4}{5}V - \tfrac{1}{5}U.$$

想一想 為甚麼我們不能直接沿連心線運用動量守恆？

繩子對 A 的衝量是垂直的，而它沿 $\mathbf{n}$ 有一個分量。所以沿 $\mathbf{n}$ 的總動量會改變。唯一沒有外來衝量作用的方向是水平方向，而那正是我們對 A 所用的方程。

*恢復定律。*沿 $\mathbf{n}$ 方向，靠近速率（speed of approach）是 $\frac{4}{5}V - 0$，因為 A 起初靜止。分離速率（speed of separation）是 $\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}'_B \cdot \mathbf{n}$，其中 $\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{n} = (-U)(-\frac{3}{5}) = \frac{3}{5}U$。所以

$$\tfrac{3}{5}U - \left(\tfrac{4}{5}V - \tfrac{1}{5}U\right) = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{4}{5}V \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{4}{5}U = \tfrac{7}{5}V \quad \Longrightarrow \quad U = \tfrac{7}{4}V.$$

有桿時的碰撞

現在球與桿組成單一個剛體（rigid body），繞 O 轉動。支點可以提供任何方向的衝量，所以水平動量不再守恆。但支點的衝量作用於 O，所以我們對 O 取矩（take moments）。根據平行軸定理（parallel axis theorem），它對 O 的轉動慣量（moment of inertia）是

$$I = \tfrac{2}{5}(3m)(2a)^2 + 3m(5a)^2 = \tfrac{24}{5}ma^2 + 75ma^2 = \tfrac{399}{5}ma^2.$$

衝量 $J\mathbf{n}$ 的作用線通過 A，而它位於 O 之下 $5a$ 的深度。只有它的水平分量 $\frac{3}{5}J$ 對 O 有矩，而該矩為 $5a \cdot \frac{3}{5}J = 3aJ$。若剛體在緊接碰撞之後的角速率（angular speed）是 ω，則 A 以速率 $U' = 5a\omega$ 沿水平方向運動，並且

$$I\omega = 3aJ \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{399}{5}ma^2 \cdot \frac{U'}{5a} = 3aJ \quad\Longrightarrow\quad J = \tfrac{133}{25}\,mU'.$$

關於 B 的方程和恢復定律的方程與之前完全相同，因為它們只涉及沿 $\mathbf{n}$ 的分量。所以

$$\tfrac{3}{5}U' - \left(\tfrac{4}{5}V - \frac{J}{25m}\right) = \tfrac{3}{5}V \quad\Longrightarrow\quad \left(\tfrac{3}{5} + \tfrac{133}{625}\right)U' = \tfrac{7}{5}V \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{508}{625}U' = \tfrac{7}{5}V,$$

所以 $U' = \frac{875}{508}V$。把這個結果與 $U = \frac{7}{4}V$ 比較，

$$\frac{U'}{U} = \frac{875}{508} \cdot \frac{4}{7} = \frac{500}{508} = \frac{125}{127},$$

所以 A 在緊接碰撞之後的速率是 $125U/127$，正如題目所求。

答案比之前稍小，這是合理的。有繩子時，A 抵抗水平運動的表現就像一個質量為 $3m$ 的質點。有桿時，球還必須開始轉動，而它在 A 處的等效水平質量變成 $I/(5a)^2 = \frac{399}{125}m$，比 $3m$ 略大。

驗算

- 能量：取 $m = a = V = 1$，碰撞前的動能（kinetic energy）是 12.5。碰撞後，有繩子時是 11.625，有桿時約為 11.58。兩者都較小，在 $e < 1$ 時必然如此。
- 彈性極限情況：取 $e = 1$ 並用繩子，同樣的步驟給出 $\frac{4}{5}U = \frac{8}{5}V$，所以 $U = 2V$，而動能恰好守恆。這確認了正負號無誤。
- 用電腦以精確分數求解兩次碰撞，取 $a = m = V = 1$。結果是 $U = 7/4$ 和 $U' = 875/508$，得出比值 $125/127$。電腦亦核對了 B 的切向速度（tangential velocity）不變，以及 B 在接觸前下落的距離為 a。

常見錯誤

- 沿連心線運用總動量守恆。繩子或支點會提供外來衝量，而該衝量在這個方向上有分量。

- 忘記桿上的球會轉動。它對 O 的轉動慣量除了 $3m(5a)^2$ 之外，還需要 $\frac{2}{5}(3m)(2a)^2$ 這一項。
- 把連心線當作成 45° 角，或當作垂直。相切的條件決定了它構成一個 3–4–5 三角形。

STEP 之外

受約束的碰撞讓我們初次接觸剛體的衝擊運動（impulsive motion of rigid bodies）。一般的法則是：固定支點上的衝量，不會出現在對該支點的角動量方程之中。由此可引伸出撞擊中心（centre of percussion）的概念：敲擊一個裝有支點的物體時，若擊中這一點，支點便完全感受不到衝量，這就是板球棒有「甜蜜點」的原因。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）正是以這個程度講解角動量和剛體衝量。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。