詳細解答

STEP III 1989，第 10 題

純數學 • 黎曼和

> **STEP III 1989，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q10

本題在 *Beyond STEP* 第 4.1 節 *甚麼是積分？* 中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/riemann.html

關鍵思路

連續整數之積（product of consecutive integers）是 r^5 的「下降冪」（falling power）版本，而且可以用裂項相消（telescoping）求和，與 r^5 的積分如出一轍：兩個相鄰的六項乘積之差，等於一個五項乘積的六倍。第 (i) 和第 (ii) 部分分別給出一個略大於和一個略小於 $\sum r^5$ 的乘積之和。第 (iii) 部分再把 x^5 的兩個黎曼和（Riemann sum）夾在這兩個界之間，而兩個界趨向同一個極限。

解答

第 (i) 部分

設 $P(r) = r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)$。那麼 $P(r)$ 與 $P(r-1) = (r-1)r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$ 有五個公共因子 $r(r+1)\cdots(r+4)$，所以

$$\begin{aligned} P(r) - P(r-1) &= r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)\big[(r+5) - (r-1)\big] \\ &= 6\,r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4). \end{aligned}$$

由 $r = 1$ 加至 n，右邊裂項相消：

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) &= \tfrac{1}{6}\sum_{r=1}^{n}\big[P(r) - P(r-1)\big] = \tfrac{1}{6}\big[P(n) - P(0)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}\,n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5), \end{aligned}$$

因為 $P(0) = 0$。（對 n 使用歸納法（induction）同樣可行；歸納步驟用的正是同一個因式分解。）

至於推論：若 $r \geq 1$，則對 $k = 1, 2, 3, 4$，每個因子都滿足 $r + k > r > 0$，所以

$$r^5 < r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) \qquad (r \geq 1).$$

把 $r = 1, \ldots, n$ 的這些嚴格不等式（strict inequality）相加，便得 $\sum_{r=1}^{n} r^5 < \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$，正是所求。

第 (ii) 部分

現在我們需要一個位於 r^5 之下的乘積，所以把各因子向下平移：改用 $(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r$。設 $Q(r) = (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r(r+1)$，同樣的因式分解給出

$$\begin{aligned} Q(r) - Q(r-1) &= (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r\big[(r+1) - (r-5)\big] \\ &= 6\,(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r. \end{aligned}$$

由 $r = 0$ 加至 $n-1$：

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{n-1} (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r &= \tfrac{1}{6}\big[Q(n-1) - Q(-1)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}\,(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n, \end{aligned}$$

因為 $Q(-1) = (-5)(-4)(-3)(-2)(-1) \cdot 0 = 0$。

? **想一想** 對和式中的每一個 r，$(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r < r^5$ 是否都成立？

不盡然，而這正是條件 $n > 1$ 發揮作用的地方。我們逐項比較：

- $r = 0$：兩邊都是 0，所以只有等式成立。
- $r = 1, 2, 3, 4$：乘積中有一個因子為零，所以乘積是 $0 < r^5$。
- $r \geq 5$：對 $k = 1, 2, 3, 4$，每個因子都滿足 $0 < r - k < r$，所以乘積 $< r^5$。

因此對所有 $r \geq 0$，都有 $(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r \leq r^5$，而且對每個 $r \geq 1$，不等式都是嚴格的。若 $n > 1$，由 $r = 0$ 至 $n-1$ 的和包含 $r = 1$ 這一項，所以最少有一個不等式是嚴格的，於是

$$\sum_{r=0}^{n-1} r^5 > \tfrac{1}{6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n.$$

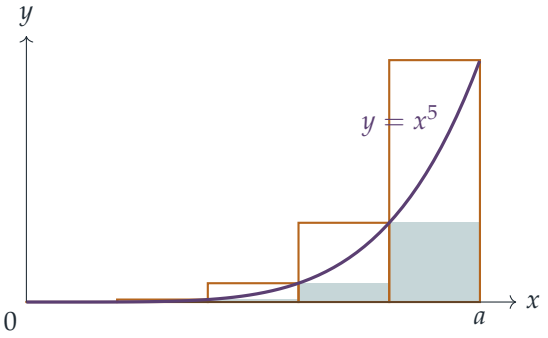
（當 $n = 1$ 時，兩邊都是 0，這就是需要該條件的原因。）

第 (iii) 部分

取 $\mathrm{f}(x) = x^5$，這是一個遞增函數（increasing function）。定義中的兩個和是

$$L_n = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{a}{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^5 = \frac{a^6}{n^6}\sum_{r=0}^{n-1} r^5, \qquad U_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{a}{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^5 = \frac{a^6}{n^6}\sum_{r=1}^{n} r^5.$$

當 $a > 0$ 時，它們分別是曲線下方和上方各長方形的面積之和：



（塗色部分：L_n；框線部分：U_n；圖中 $n = 5$。）不過，以下的代數運算並不需要 $a > 0$：對任何 $a \neq 0$ 都有 $a^6 > 0$，而 $a = 0$ 的情況顯然成立，因為每個和都是 0。

對 L_n 使用第 (ii) 部分（其中 $n > 1$），對 U_n 使用第 (i) 部分，

$$L_n > \frac{a^6}{6n^6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n = \frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1-\frac{k}{n}\right),$$

$$U_n < \frac{a^6}{6n^6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) = \frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

此外 $U_n - L_n = \dfrac{a^6}{n^6}\left(n^5 - 0^5\right) = \dfrac{a^6}{n} > 0$，所以綜合起來

$$\frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1-\frac{k}{n}\right) < L_n < U_n < \frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

當 $n \to \infty$ 時，每個括號都趨向 1，所以外側的兩個界都趨向 $\frac{1}{6}a^6$。根據夾逼定理（squeeze theorem，又稱 sandwich theorem），L_n 和 U_n 都收斂（converge），而且收斂至同一個極限 $\frac{1}{6}a^6$。所以定義中的兩個極限都存在而且相等，因此

$$\int_0^a x^5\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{6}a^6.$$

驗算

- 第 (i) 部分的小數值情況：當 $n = 1$ 時，$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120 = \frac{1}{6}\cdot 720$；當 $n = 2$ 時，$120 + 720 = 840 = \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7$。

- 第 (i) 和第 (ii) 部分的恆等式（identity），以及兩個不等式，對 200 以內的每個 n 都準確成立（已用電腦核對）。
- 取 $a = 1$ 和 $n = 1000$：$L_n \approx 0.166167$，$U_n \approx 0.167167$，分別位於 $\frac{1}{6} \approx 0.166667$ 的兩側，而且 $U_n - L_n = 0.001 = a^6/n$。

常見錯誤

- 聲稱對所有 $r \geq 0$ 都有 $(r-4)\cdots r < r^5$：在 $r = 0$ 時其實是等式，所以嚴格不等式要靠 $r = 1$ 這一項，亦即需要 $n > 1$。
- 只證明 L_n 和 U_n 有界（bounded），或只證明 $U_n - L_n \to 0$。定義要求兩個極限都*存在*；夾逼定理則一併給出存在性和極限值。

STEP 之外

第 (iii) 部分是黎曼（Riemann）積分（或稱達布（Darboux）積分）的一次親手實踐：若一個函數的下和（lower sum）與上和（upper sum）可以夾在一起，該函數便是可積（integrable）的；對單調函數（monotonic function）而言，兩者之差恆為 $(b-a)\,|f(b) - f(a)|/n$，所以閉區間（closed interval）上的每個單調函數都可積。第 (i) 和第 (ii) 部分的乘積分別是「上升階乘冪」（rising factorial power）和「下降階乘冪」（falling factorial power），它們令有限差分演算（calculus of finite differences）看起來與普通的微積分一模一樣。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本實分析入門書）正是以這種方式建立積分理論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。