詳細解答

STEP III 1989，第 1 題

純數學 • 旋轉曲面

> **STEP III 1989，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q1

關鍵思路

球面是半圓的旋轉曲面（surface of revolution），所以球帶（zone）的面積是一個標準的旋轉曲面積分。出人意表的是，被積函數（integrand）原來是常數，這正是答案只取決於兩平面之間距離的原因。在第二部分，曲面分成一個圓錐（由 OP 生成）和一個球帶（由弧 PR 生成）。這時第一個結果便擔起了最吃力的工作，而相切的條件則提供了我們所需的直角三角形。

關於題目印出的方程，要說明一下：若右邊是 c^2，圓便會通過 O，而常數 a 則從未出現。題目原意的曲線顯然是

$$(x-c)^2+y^2=a^2,$$

即圓心為 $C=(c,0)$、半徑為 a 的圓。由於 $c>a$，原點在圓外，所以由 O 出發的切線（tangent）存在。我們就這條曲線來解題。

解答

球帶的面積

取一個半徑為 r、球心在原點的球面，並選取 x 軸與兩個平面垂直，這兩個平面是 $x=h_1$ 和 $x=h_2$，其中 $-r\le h_1<h_2\le r$。球面由上半圓 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 繞 x 軸旋轉 2π 而成，所以球帶的面積是

$$S=\int_{h_1}^{h_2}2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

這裏 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$，所以當 $|x| < r$ 時

$$y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}} = \sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} = r.$$

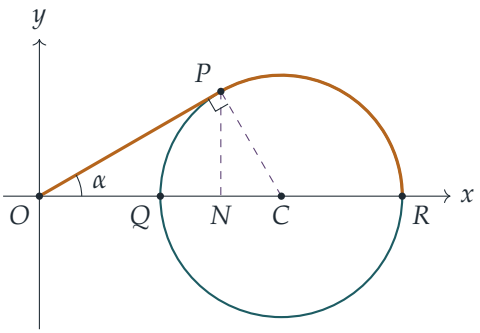
? **想一想** 在 $x = \pm r$ 處，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 是無窮大，這時會怎樣？

導數（derivative）在兩極處趨向無窮大，但乘積 $y\sqrt{1+(y')^2}$ 在整個 $(-r, r)$ 上都等於 r，所以它是有界的。若其中一個平面與球面相切（$h_1 = -r$ 或 $h_2 = r$），這個積分雖屬反常積分（improper integral），卻無傷大雅：先積分至 $h_2 - \varepsilon$，再令 $\varepsilon \to 0$ 即可。（另一個做法是以 $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ 作參數化（parametrise），這樣便完全避開了這個問題。）因此

$$S = \int_{h_1}^{h_2} 2\pi r\,\mathrm{d}x = 2\pi r\,(h_2 - h_1),$$

也就是 $2\pi \times$ (半徑) $\times$ (兩平面之間的距離)，正是所求。

曲面



設 $C = (c, 0)$ 為圓心，N 為由 P 至 x 軸的垂足。那麼 $Q = (c-a, 0)$，$R = (c+a, 0)$。弧 PR 是指不經過 Q 的那一段（圖中以琥珀色標示）：由 P 到 R 的另一段弧會經過 Q 並繞過圓的底部，把它旋轉便會掃出整個球面。

切線與過切點的半徑互相垂直，所以角 OPC 是直角。在三角形 OPC 中，$OC = c$ 而 $CP = a$，所以由畢氏定理（Pythagoras' theorem）得

$$OP = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

設 α 為角 POC。那麼 $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ 而 $\cos\alpha = \frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}$，由此得

$$PN = OP\sin\alpha = \frac{a\sqrt{c^2-a^2}}{c}, \qquad ON = OP\cos\alpha = \frac{c^2-a^2}{c}.$$

圓錐。把 OP 繞 x 軸旋轉，得到一個斜高（slant height）為 $l = OP$、底半徑為 PN 的圓錐。它的曲面面積是 $\pi \times$ (底半徑) $\times$ (斜高)，即

$$\pi \cdot \frac{a\sqrt{c^2 - a^2}}{c} \cdot \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{\pi a(c^2 - a^2)}{c}.$$

球帶。把弧 PR 旋轉，得到球面（球心 C，半徑 a）上夾在兩個平面之間的部分：一個是過 N 且垂直於軸的平面，另一個是在 R 處的切平面（tangent plane）。這兩個平面相距

$$NR = (c + a) - \frac{c^2 - a^2}{c} = \frac{ac + a^2}{c} = \frac{a(c + a)}{c}$$

，所以由第一個結果，球帶的面積是

$$2\pi a \cdot \frac{a(c + a)}{c} = \frac{2\pi a^2(c + a)}{c}.$$

總和。把兩部分相加，

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \frac{\pi a}{c}\left[(c^2 - a^2) + 2a(c + a)\right] \\ &= \frac{\pi a}{c}(c^2 + 2ac + a^2) \\ &= \frac{\pi a(c + a)^2}{c}. \end{aligned}$$

驗算

- 取 $a = 1$，$c = 2$。那麼 $P = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，圓錐的面積是 $\frac{3\pi}{2}$，球帶的面積是 3π，所以總面積是 $\frac{9\pi}{2} \approx 14.137$。以 20 000 條短線段逼近曲線，再把所得各個圓台（frustum）的面積相加，得 14.13717。
- 當 $a \to c$ 時，P 趨近 O，圓錐隨之消失。曲面變成半徑為 c 的整個球面，而果然 $\pi c(2c)^2/c = 4\pi c^2$。
- 當 a 固定而 $c \to \infty$ 時，面積的增長與 πac 相若，這正是一個斜高約為 c、底半徑約為 a 的細長圓錐的面積。這與我們的預期相符。

常見錯誤

- 以 OC 或 ON 代替 OP 作為圓錐的斜高。
- 由 C 或 Q 起量度球帶的厚度，而不是由 N（即由 P 所作垂線的垂足）起量度。
- 使用公式 $2\pi rh$ 時取 $r = c$ 而非 $r = a$：被截的球面是以 C 為球心、半徑為 a 的那一個，而不是任何以 O 為球心的球面。

STEP 之外

球帶的結果就是阿基米德（Archimedes）定理。把球面沿水平方向投影到外接圓柱上，面積保持不變，這就是蘭伯特（Lambert）等積地圖投影背後的想法。它也解釋了為甚麼在球面上均勻地選取一點時，該點的高度服從均勻分佈（uniform distribution）。旋轉曲面的面積，是大學一年級向量微積分（vector calculus）課程中曲面積分（surface integral）$\iint |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$ 的第一個例子。若想從優美的幾何角度認識曲率（curvature）與曲面，可參閱 Needham 的 *Visual Differential Geometry and Forms*（以圖像講解微分幾何與微分形式）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。