詳細解答

STEP II 1989，第 9 題

純數學 • 矩陣指數與方程組

> **STEP II 1989，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q9

關鍵思路

一切都繫於一個小小的計算：$\mathbf{A}^2$ 原來就是單位矩陣（identity matrix）。於是 $\mathbf{A}$ 的每個偶次冪都是 $\mathbf{I}$，每個奇次冪都是 $\mathbf{A}$，所以該級數可拆成指數級數（exponential series）的偶數項部分和奇數項部分，也就是 $\cosh t$ 和 $\sinh t$。至於微分方程（differential equation），我們仿照純量（scalar）情況下的積分因子（integrating factor）法，由矩陣 $\mathbf{F}$ 擔當 $\mathrm{e}^{\int a\,\mathrm{d}t}$ 的角色。

解答

矩陣 F

乘開可得

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-8 & 3-3 \\ -24+24 & -8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

因此對所有 $k \geq 0$，$\mathbf{A}^{2k} = (\mathbf{A}^2)^k = \mathbf{I}$ 及 $\mathbf{A}^{2k+1} = \mathbf{A}^{2k}\mathbf{A} = \mathbf{A}$。寫成 $\mathbf{I} = \frac{t^0}{0!}\mathbf{A}^0$，並把級數按 n 為偶數和奇數拆開（矩陣級數的每個元素都是絕對收斂（absolutely convergent）純量級數的重排，所以這樣做是容許的），

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\mathbf{A}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\mathbf{A}^{2k+1} \\ &= \mathbf{I}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \mathbf{A}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \mathbf{I}\cosh t + \mathbf{A}\sinh t,\end{aligned}$$

當中用到麥克勞林級數（Maclaurin series）$\cosh t = \sum t^{2k}/(2k)!$ 和 $\sinh t = \sum t^{2k+1}/(2k+1)!$。這正是所求的形式。

逆矩陣

設 $\mathbf{G} = \mathbf{I}\cosh t - \mathbf{A}\sinh t$。由於 $\mathbf{I}$ 與 $\mathbf{A}$ 可交換（commute），我們可以像處理普通數字一樣乘開：

$$\mathbf{FG} = \mathbf{I}\cosh^2 t - \mathbf{A}^2\sinh^2 t + (\mathbf{A} - \mathbf{A})\cosh t \sinh t = \mathbf{I}(\cosh^2 t - \sinh^2 t) = \mathbf{I},$$

當中用到 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ 和 $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$。同樣的計算給出 $\mathbf{GF} = \mathbf{I}$，所以 $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}\cosh t - \mathbf{A}\sinh t$。

導數

逐個元素求導（矩陣 $\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{A}$ 都是常數矩陣），

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{I}\sinh t + \mathbf{A}\cosh t, \qquad \text{而} \qquad \mathbf{FA} = \mathbf{A}\cosh t + \mathbf{A}^2\sinh t = \mathbf{A}\cosh t + \mathbf{I}\sinh t.$$

兩者相同，所以 $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{FA}$。另外留意 $\mathbf{FA} = \mathbf{AF}$，因為 $\mathbf{F}$ 是由 $\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{A}$ 組合而成的。

微分方程

在純量方程 $r' + ar = 0$ 中，我們乘以 e^{at}，它的導數是 $\mathrm{e}^{at}a$，於是左方恰好變成某個式子的導數。矩陣 $\mathbf{F}$ 正有這個性質，即 $\mathbf{F}' = \mathbf{FA}$，所以我們在方程的左邊乘上 $\mathbf{F}$：

$$\mathbf{F}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{FAr} = \mathbf{0}.$$

根據積法則（product rule）（只要保持各因子的次序，它對矩陣乘積同樣成立），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{Fr}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r} + \mathbf{F}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{FAr} + \mathbf{F}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t},$$

這恰好就是左方。所以方程說的是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{Fr}) = \mathbf{0},$$

而 $\mathbf{Fr}$ 是一個常向量 $\mathbf{c}$。

> ? **想一想** 為甚麼要在左邊乘而不是在右邊乘？又怎樣求出 $\mathbf{c}$？

乘積 $\mathbf{rF}$ 根本沒有意義（$\mathbf{r}$ 是一個 2×1 的列向量），而且積法則得出的是 $\mathbf{FAr}$，只有當 $\mathbf{F}$ 在左邊時，它才與 $\mathbf{F}(\mathbf{Ar})$ 這一項吻合。至於常向量，代入 $t = 0$：這時 $\cosh 0 = 1$ 而 $\sinh 0 = 0$，所以 $\mathbf{F} = \mathbf{I}$，並且

$$\mathbf{c} = \mathbf{I}\,\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

現在在 $\mathbf{Fr} = \mathbf{c}$ 的左邊乘上前面已求得的 $\mathbf{F}^{-1}$：

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \cosh t\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} - \sinh t\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 8 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \cosh t\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} - \sinh t\begin{pmatrix}-3\alpha-\beta\\ 8\alpha+3\beta\end{pmatrix}.$$

讀出各分量，

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha\cosh t + (3\alpha+\beta)\sinh t,\\ y(t) &= \beta\cosh t - (8\alpha+3\beta)\sinh t, \end{aligned}$$

正如所求。

驗算

- 在 $t = 0$ 時，公式給出 $x = \alpha$、$y = \beta$，理應如此。
- 直接代入：$x' = \alpha\sinh t + (3\alpha+\beta)\cosh t$，而 $-(-3x - y) = 3x + y = (3\alpha + \beta)\cosh t + \alpha\sinh t$（用到 $9\alpha + 3\beta - 8\alpha - 3\beta = \alpha$）。所以 $x' = -$(第一行，取自$\mathbf{Ar}$)，y 的情況亦類似。
- 數值上，把級數加到第 60 項，結果與 $\mathbf{I}\cosh t + \mathbf{A}\sinh t$ 吻合；而取 $\alpha = 1$、$\beta = 0$ 時，以龍格—庫塔(Runge–Kutta)法解這個方程組，得出 $x(2) \approx 14.6428$，與 $\cosh 2 + 3\sinh 2$ 相符。

常見錯誤

- 在右邊乘上 $\mathbf{F}$，又或者把 $\mathbf{AF}$ 和 $\mathbf{FA}$ 隨意互換，卻沒有說明為何在這裏可以這樣做（它們可交換，是因為 $\mathbf{F}$ 是 $\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{A}$ 的組合）。
- 拆開級數時漏掉 $\mathbf{I}$ 這一項（即 $n = 0$ 的一項），結果失去了 $\cosh t$ 的常數項 1。
- 把 $-\mathbf{A}$ 乘到 $(\alpha, \beta)^{\mathrm{T}}$ 上時弄錯正負號。

STEP 之外

矩陣 $\mathbf{F}$ 就是矩陣指數（matrix exponential）$\mathrm{e}^{t\mathbf{A}}$，而這裏的方法說明 $\mathbf{r}' = \mathbf{Mr}$ 的解總是 $\mathbf{r} = \mathrm{e}^{t\mathbf{M}}\mathbf{r}(0)$；本題中 $\mathbf{M} = -\mathbf{A}$，所以答案才會涉及 $\mathbf{F}^{-1} = \mathrm{e}^{-t\mathbf{A}}$。一般而言，計算 $\mathrm{e}^{t\mathbf{M}}$ 的方法是把 $\mathbf{M}$ 對角化（diagonalising）：我們的 $\mathbf{A}$ 的特徵值（eigenvalues）是 ± 1（這正是 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ 的含意），$\mathrm{e}^{\pm t}$ 以至 cosh 和 sinh 就是由此而來。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）有一章把矩陣指數和微分方程組講得很好，而 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）則詳細討論線性方程組。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。