詳細解答

STEP II 1989，第 8 題

純數學 • 變換群

> **STEP II 1989，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q8

關鍵思路

一切都建基於一條恆等式（identity）：$\Omega^3 = -1$，所以 Ω 滿足第一行的二次方程，我們因而可以把 Ω 的任何次冪化為 Ω 的線性式。一旦知道 R 和 T 怎樣調動這四個點，餘下的點算工夫便只與這四個點有關，而與公式無關：這個羣（group）必須能把 z_0 送到四個點中的每一個，而它本身已包含三個保持 z_0 不動的不同映射。至於最後一部分，不妨問問 R 和 T 屬於哪一類置換（permutation）。

解答

恆等式

由於 $\Omega = e^{i\pi/3}$，我們有 $\Omega^3 = e^{i\pi} = -1$，所以

$$0 = \Omega^3 + 1 = (\Omega + 1)(\Omega^2 - \Omega + 1).$$

因為 $\Omega \neq -1$，第二個因式必為零：$\Omega^2 - \Omega + 1 = 0$，這正是所求。

我們會以下列形式運用這條式：

$$\Omega^2 = \Omega - 1, \qquad \Omega^3 = -1, \qquad \Omega^4 = -\Omega.$$

另外留意 $2\Omega - 1 = 2\cos\frac{\pi}{3} - 1 + 2i\sin\frac{\pi}{3} = i\sqrt{3} \neq 0$。

R 和 T 置換這四個點

先看 R：乘以 $\Omega^2 = e^{2i\pi/3}$ 即是繞 0 旋轉 120°：

$$R(0) = 0, \qquad R(1) = \Omega^2, \qquad R(\Omega^2) = \Omega^4 = -\Omega, \qquad R(-\Omega) = -\Omega^3 = 1.$$

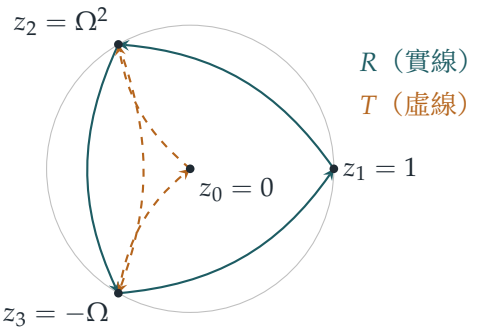
所以 R 保持 z_0 不動，並把 $z_1 \to z_2 \to z_3 \to z_1$。

再看 T：把各點逐一代入，並利用 $\Omega^2 = \Omega - 1$ 化簡：

$$\begin{aligned} T(0) &= \frac{\Omega^2}{1} = z_2, \\ T(1) &= \frac{\Omega + \Omega^2}{2\Omega^2 + 1} = \frac{2\Omega - 1}{2\Omega - 1} = 1 = z_1, \\ T(\Omega^2) &= \frac{\Omega^3 + \Omega^2}{2\Omega^4 + 1} = \frac{\Omega - 2}{1 - 2\Omega} = -\Omega = z_3, \\ T(-\Omega) &= \frac{-\Omega^2 + \Omega^2}{-2\Omega^3 + 1} = \frac{0}{3} = 0 = z_0. \end{aligned}$$

在第三行中，$\Omega^3 + \Omega^2 = -1 + (\Omega - 1) = \Omega - 2$，而最後一步成立，是因為 $-\Omega(1 - 2\Omega) = -\Omega + 2\Omega^2 = -\Omega + 2\Omega - 2 = \Omega - 2$。所有分母均不為零（它們分別是 1、$\mathrm{i}\sqrt{3}$、$-\mathrm{i}\sqrt{3}$ 和 3）。

所以 T 保持 z_1 不動，並把 $z_0 \to z_2 \to z_3 \to z_0$。$R$ 和 T 都置換這四個點；兩者各是一個 3-循環（cycle）。



這個羣的階至少為 12

設 G 為包含 R 和 T 的最小變換羣：即由 R、T 及其逆變換經複合（composition）所能得到的一切變換。G 的每個元素都把集合 $\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ 映射到它自身之上，因為 R 和 T 如此（它們的逆變換亦然，因為那是這個有限集合上的雙射（bijection）的逆）。

三個保持 z_0 不動的映射。集合 $H = \{I, R, R^2\}$ 包含於 G 之內，其中每個元素都保持 z_0 不動，而且三者是不同的變換（分別是旋轉 $0°$、$120°$、$240°$）。

把 z_0 送到每一個點的映射。利用上面求得的循環，

$$g_0 = I, \qquad g_1 = R^2T, \qquad g_2 = T, \qquad g_3 = RT$$

滿足 $g_k(z_0) = z_k$：例如 $RT(z_0) = R(z_2) = z_3$ 以及 $R^2T(z_0) = R^2(z_2) = R(z_3) = z_1$。

現在考慮十二個乘積 $g_k h$，其中 $k \in \{0,1,2,3\}$ 而 $h \in H$。由於 $h(z_0) = z_0$，我們得到 $g_k h(z_0) = z_k$。

> **想一想** 這十二個乘積當中，會否有兩個其實是同一個變換？

不會。若 $g_k h = g_l h'$，把兩邊同時作用於 z_0：我們得到 $z_k = z_l$，所以 $k = l$。然後在左邊複合上 g_k^{-1}，便得 $h = h'$。因此這十二個乘積是 G 中互不相同的元素，於是 $|G| \geq 12$。（用羣論的語言來說：z_0 的軌道（orbit）大小為 4，而它的穩定子（stabiliser）大小至少為 3，所以根據軌道－穩定子定理（orbit–stabiliser theorem），$|G| \geq 4 \times 3$。）

最後一部分

有的：這四個點的 24 個置換當中，恰好有一半永遠無法產生。

> **想一想** 作為置換，R 和 T 有甚麼共通之處？

兩者各是一個 3-循環，而 3-循環是偶置換（even permutation）：例如 $(z_1\, z_2\, z_3) = (z_1\, z_3)(z_1\, z_2)$，是兩個對換（transposition）的乘積。它們的逆也是 3-循環。偶置換的複合仍是偶置換，所以由 R 和 T 產生的每一個點置換都是偶置換。四件物件只有 12 個偶置換，所以其餘 12 個，即奇置換，永遠不會產生。例如，把 z_0 和 z_1 對調而保持 z_2 和 z_3 不動，是單獨一個對換，因而是奇置換，不可能得到。

事實上，結合上一部分，這就完全確定了 G。R 和 T 都是莫比烏斯變換（Möbius map）（T 有 $ad - bc = \Omega - 2\Omega^4 = 3\Omega \neq 0$），而保持三個點不動的莫比烏斯變換必為恆等變換，所以 G 的每個元素都由它怎樣置換這四個點所決定。因此 $|G| \leq 12$，再配合上一部分，$|G| = 12$：G 在這些點上的作用，正是全體偶置換所成的羣 A_4。

驗算

- 以數值計算，$|\Omega^2 - \Omega + 1| \approx 2 \times 10^{-16}$，而在四個點上計算 R 和 T 的值，所得的正是上述兩個 3-循環。
- $R^3 = I$ 顯然成立；而 $T^3 = I$ 亦成立，正如 3-循環所應有的性質（已在一個隨機點上檢驗，準確至 10^{-16}）。
- 用電腦生成 R 和 T 的所有複合，恰好得到 12 個不同的映射，全部誘導出偶置換，其中 z_0 被移到全部四個點，並有 3 個映射保持它不動。

常見錯誤

- 論證說「G 含有階（order）為 3 的元素，所以 $|G| \geq 12$」。單憑階為 3 的元素，只能得出 3 整除 $|G|$；因子 4 是來自在四個點上的可遷性（transitivity）。
- 沒有化簡 Ω 的冪，以致 $T(\Omega^2) = -\Omega$ 看似不成立。應先把一切化為 $a + b\Omega$ 的形式。

STEP 之外

$|G| =$ (軌道大小) $\times$ (穩定子大小) 這個點算結果就是軌道－穩定子定理，而全體偶置換構成交錯羣（alternating group）A_4，它也是正四面體的旋轉羣。這裏出現這個現象，背後有個很漂亮的原因：莫比烏斯變換保持四個點的交比（cross-ratio）不變，而這四個點的交比是 $e^{-i\pi/3}$，正是那個特殊的「等非調和」（equianharmonic）值，對這個值而言，恰好只有偶置換保持交比不變。關於羣和羣作用（group action），可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*；關於莫比烏斯變換和黎曼球面（Riemann sphere），可參閱 Needham 的 *Visual Complex Analysis*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。