詳細解答

STEP II 1989，第 7 題

純數學 • 二階微分方程

> **STEP II 1989，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q7

關鍵思路

$x\,y''$ 與 $-b\,y'$ 這兩項放在一起看似棘手，但只要更換自變量（independent variable），設 $t = x^{\alpha}$，y'' 便會產生一個一階導數項，而這一項可以恰好與 $-b\,y'$ 抵消。適當選取 α 做到這一點之後，餘下的就是關於 t 的簡諧運動（simple harmonic motion）。此後，當 $x \to 0$ 時的表現，就取決於 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 中的因子 x^{b} 如何變化，而這又取決於 b 的正負。

解答

更換變量

設 $t = x^{\alpha}$，其中 α 待定，並把 y 視為 t 的函數。記 $\dot{y} = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$，由鏈式法則（chain rule）得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha x^{\alpha-1}\dot{y},$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\dot{y} + \alpha^2 x^{2\alpha-2}\ddot{y},$$

其中第二行用了積法則（product rule）以及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dot{y} = \alpha x^{\alpha-1}\ddot{y}$。代入後得

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha^2 x^{2\alpha-1}\ddot{y} + \alpha(\alpha-1-b)\,x^{\alpha-1}\dot{y}.$$

若取 $\alpha = b+1$，$\dot{y}$ 項便會消失；由於 $b > -1$，這個值不等於零。此時 $2\alpha - 1 = 2b+1$，於是方程變成

$$(b+1)^2 x^{2b+1}\ddot{y} + x^{2b+1}y = 0 \quad\Longrightarrow\quad \ddot{y} + \frac{y}{(b+1)^2} = 0,$$

這裏兩邊除以了 $x^{2b+1} \neq 0$（因為 $x > 0$）。這是關於 t 的簡諧運動，角頻率（angular frequency）為 $1/(b+1)$，所以

$$\boxed{y = A\cos\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right) + B\sin\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right)}$$

其中 A、B 為任意常數。二階方程配上兩個任意常數：這就是通解（general solution）。

當 $x \to 0$ 時的表現

記 $u = x^{b+1}/(b+1)$。由於 $b+1 > 0$，當 $x \to 0^+$ 時 $u \to 0^+$，所以

$$y \to A\cos 0 + B\sin 0 = A.$$

因此 $y \to 1$ 迫使 $A = 1$。利用 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = x^b$ 求導，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^b(-\sin u + B\cos u) \qquad (A = 1).$$

情況 $b > 0$。此時 $x^b \to 0$，而括號內的式子趨向 B，是一個有限值。所以*無論 B 取甚麼值*，都有 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to 0$。以下這族函數

$$y = \cos\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right) + B\sin\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right), \qquad B \in \mathbb{R},$$

中的每一個都滿足兩個條件。解是存在的，但並不唯一，正如題目所要求證明的。

> **想一想** 對於一般的二階方程，給定 y 的一個值和 y' 的一個值，就能確定解。為甚麼在這裏卻行不通？

唯一性定理（uniqueness theorem）要求方程可寫成 $y'' = f(x, y, y')$ 的形式，而且 f 的性質要夠好。兩邊除以 x 得 $y'' = (b/x)\,y' - x^{2b}y$，而係數 b/x 在 $x = 0$ 處趨向無窮。$x = 0$ 這一點是奇點（singular），所以通常的保證在該處並不適用。

情況 $b = 0$。此時 $x^b = 1$，而 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to B$。條件迫使 $B = 0$，得出唯一解 $y = \cos x$。（這其實就是 $y'' + y = 0$。）

情況 $-1 < b < 0$。此時 $x^b \to \infty$。若 $B \neq 0$，則 $Bx^b\cos u \to \pm\infty$，而另一項很小：由於 $\sin u \leq u$，

$$|x^b \sin u| \leq x^b \cdot \frac{x^{b+1}}{b+1} = \frac{x^{2b+1}}{b+1}.$$

更準確地說，$\sin u/u \to 1$，所以 $x^b \sin u \sim x^{2b+1}/(b+1)$。因此必須有 $B = 0$，這時

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x^b \sin u \sim -\frac{x^{2b+1}}{b+1}.$$

這個式子趨向 0，當且僅當 $2b+1>0$，即 $b>-\frac{1}{2}$。當 $b=-\frac{1}{2}$ 時它趨向 -2，而當 $b<-\frac{1}{2}$ 時它無界。所以當 $-\frac{1}{2}<b<0$ 時恰好有一個解 $y=\cos(x^{b+1}/(b+1))$，而當 $-1<b\le-\frac{1}{2}$ 時則沒有解。

結論

這些條件能確定唯一解，恰好是在

$$-\tfrac{1}{2}<b\le 0,$$

的時候，而該解為 $y=\cos(x^{b+1}/(b+1))$。



驗算

- $b=0$ 時方程為 $y''+y=0$，其解 $A\cos x+B\sin x$ 與公式吻合。
- 數值上，通解在捨入誤差範圍內滿足方程（在隨機選取的 x, b, A, B 處用有限差分檢驗）。取 $b=-\frac{1}{4}$, $B=0$，我們在 $x=10^{-9}$ 處得到 $y'\approx -4.2\times10^{-5}$，趨向 0。取 $b=-\frac{1}{2}$ 時，該值保持在 -2；而取 $b=1, B=5$ 時，在 $x=10^{-9}$ 處的值為 5×10^{-9}。

常見錯誤

- 做到「$b\le0$ 時解唯一」就停下來：當 $-1<b\le-\frac{1}{2}$ 時，即使是餘弦解也有 $y'\not\to 0$，所以根本沒有解。
- 把 $\alpha x^{\alpha-1}\dot{y}$ 對 x 求導時忘記用積法則。多出來的那一項正是用來抵消 $-b\,y'$ 的。

STEP 之外

$x=0$ 這一點是這個方程的正則奇點（regular singular point）。在這類點附近，弗羅貝尼烏斯法（Frobenius method）會尋找形如 $x^r\sum c_n x^n$ 的解，而這裏的指標方程（indicial equation）的根為 $r=0$ 和 $r=b+1$。在奇點處哪些條件能確定一個解，取決於這些指數，正如我們剛才所見。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教材）涵蓋了級數解和正則奇點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。