詳細解答

STEP II 1989，第 6 題

純數學 • 反函數的積分

> **STEP II 1989，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q6

關鍵思路

右邊有一個 g 對 y 的積分，所以最自然的做法是把左邊的積分改寫成以 $y = \mathrm{f}(x)$ 表示，即作代換（substitution）$x = \mathrm{g}(y)$。新的被積函數（integrand）含有 $y\,\mathrm{g}'(y)$，一看便知要用分部積分法（integration by parts），而邊界項正好給出那兩個長方形。第二條公式的做法完全一樣，只是把 x 換成 $x^2/2$，把面積換成繞 y 軸的旋轉體體積（volume of revolution）。

解答

第一條公式

由於在 $[a, b]$ 上 $\mathrm{f}'(x) > 0$，f 在該區間上嚴格遞增（strictly increasing），所以它是由 $[a, b]$ 到 $[\alpha, \beta]$ 的雙射（bijection），反函數（inverse function）$\mathrm{g}\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ 存在。此外 g 可微（differentiable），且

$$\mathrm{g}'(y) = \frac{1}{\mathrm{f}'(\mathrm{g}(y))},$$

這個式子有意義，因為 f′ 永不為零。

代入 $x = \mathrm{g}(y)$，於是 $\mathrm{f}(x) = y$，$\mathrm{d}x = \mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y$。當 $x = a$ 時，$y = \mathrm{f}(a) = \alpha$；當 $x = b$ 時，$y = \beta$。因此

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta y\,\mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y.$$

現在用分部積分法，取 $u = y$ 和 $\mathrm{d}v = \mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y$，所以 $v = \mathrm{g}(y)$：

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta y\,\mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y &= \Big[y\,\mathrm{g}(y)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \beta\,\mathrm{g}(\beta) - \alpha\,\mathrm{g}(\alpha) - \int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= b\beta - a\alpha - \int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

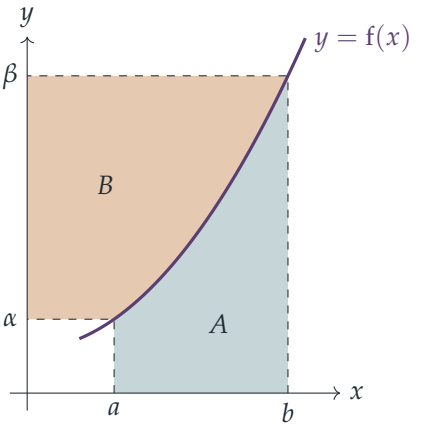
因為 $\mathrm{g}(\beta) = b$ 及 $\mathrm{g}(\alpha) = a$。這就是所求的公式。

幾何意義

取 $a > 0$ 及 $\alpha > 0$。由於 f 遞增，$0 < a < b$ 且 $0 < \alpha < \beta$，所以曲線 $y = \mathrm{f}(x)$ 由 (a, α) 到 (b, β) 的一段弧位於第一象限（first quadrant）。把公式寫成

$$\underbrace{\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{面積}A} + \underbrace{\int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y}_{\text{面積}B} = b\beta - a\alpha.$$

這裏 A 是 $a \le x \le b$ 時曲線與 x 軸之間的面積，B 是 $\alpha \le y \le \beta$ 時曲線與 y 軸之間的面積（把圖形橫過來看，曲線就是 $x = \mathrm{g}(y)$）。兩者合起來，恰好填滿長方形 $[0, b] \times [0, \beta]$ 除去較小的長方形 $[0, a] \times [0, \alpha]$ 後餘下的部分，而這個 L 形區域的面積是 $b\beta - a\alpha$。



第二條公式

用同一個代換 $x = \mathrm{g}(y)$，$\mathrm{d}x = \mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y$：

$$2\pi \int_a^b x\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_\alpha^\beta y\,\mathrm{g}(y)\,\mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y.$$

想一想 這一次應該對哪一個因子積分？

留意根據鏈式法則（chain rule），$g(y)\,g'(y)$ 是 $\frac{1}{2}[g(y)]^2$ 的導數。所以取 $u = y$ 和 $v = \frac{1}{2}[g(y)]^2$ 作分部積分：

$$\begin{aligned}2\pi\int_\alpha^\beta y\,g(y)\,g'(y)\,dy &= 2\pi\left(\left[\tfrac{1}{2}y\,[g(y)]^2\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2}[g(y)]^2\,dy\right)\\ &= \pi(\beta b^2 - \alpha a^2) - \pi\int_\alpha^\beta [g(y)]^2\,dy,\end{aligned}$$

這裏同樣用到 $g(\beta) = b$ 及 $g(\alpha) = a$。這就是第二條公式。

第二條公式的幾何意義

同樣取 $a > 0$、$\alpha > 0$，把上圖繞 y 軸旋轉一整周。

- 區域 A 掃出一個立體，用圓柱殼法（method of cylindrical shells）計算，其體積為 $2\pi\int_a^b x\,f(x)\,dx$：與旋轉軸相距 x、高 $f(x)$、闊 dx 的窄條，旋轉後成為一個體積約為 $2\pi x\,f(x)\,dx$ 的圓柱殼。
- 區域 B 掃出一個立體，用圓盤法（discs）計算，其體積為 $\pi\int_\alpha^\beta [g(y)]^2\,dy$：位於高度 y 的窄條，旋轉後成為一個半徑為 $g(y)$ 的圓盤。
- 兩個立體合起來，恰好填滿一個半徑為 b、高為 β 的圓柱體，再從其底部挖去一個半徑為 a、高為 α 的同軸圓柱體，其體積為 $\pi b^2\beta - \pi a^2\alpha$。

所以這條公式是說：圓柱殼體積加圓盤體積，等於兩個圓柱體的體積之差。條件 $a > 0$ 和 $\alpha > 0$ 確保兩個區域都在旋轉軸的同一側，並且在 x 軸上方，這樣兩個積分才真正是體積，而兩個立體也不會重疊。

驗算

試取 $[1,2]$ 上的 $f(x) = x^2$，於是 $\alpha = 1$，$\beta = 4$，$g(y) = \sqrt{y}$。第一條公式左邊是 $\frac{7}{3}$，右邊是 $8 - 1 - \frac{2}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$。第二條公式左邊是 $2\pi\cdot\frac{15}{4} = \frac{15\pi}{2}$，右邊是 $\pi(16-1) - \pi\cdot\frac{15}{2} = \frac{15\pi}{2}$。我們亦用辛普森法則（Simpson's rule）對兩條公式作了數值驗算，其中 g 以二分法（bisection）求得；所驗算的幾個函數包括 $[\frac{1}{2},2]$ 上的 $x^3 + x$，這時第一條公式兩邊都等於 5.859375。

常見錯誤

- 忘記更改積分上下限：代入 $x = g(y)$ 之後，上下限變成 α 和 β，而不是 a 和 b。

- 沒有說明 g 為何存在和可微。條件 $\mathrm{f}' > 0$ 正是為此而設。
- 把區域 B 說成位於曲線之下。其實它位於曲線與 y 軸之間。

STEP 之外

f 與 f^{-1} 的圖像互為關於 $y = x$ 的反射，而第一條公式正是這個事實的積分版本。它是楊氏不等式（Young's inequality）背後的想法：若 f 遞增、$\mathrm{f}(0) = 0$ 且 $a, b \geq 0$，則 $ab \leq \int_0^a \mathrm{f} + \int_0^b \mathrm{f}^{-1}$；凸分析（convex analysis）和哈密頓力學（Hamiltonian mechanics）中所用的勒讓德變換（Legendre transform），背後也是同一個想法。arcsin 和 ln 等反函數的積分，同樣可以靠它求出，無需任何巧妙的代換。想看代換與反函數的嚴謹處理，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本實分析入門書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。