詳細解答

STEP II 1989，第 5 題

純數學 • 極坐標曲線與反射

STEP II 1989，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/89-s2-q5

關鍵思路

第 (i) 部分只不過是把 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 代入 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)/(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta)$。至於鏡面，以 O 為中心的極坐標（polar coordinates）是最自然的選擇，因為反射光線總是沿着半徑回到極點（pole）。這樣，反射定律（law of reflection）就能單憑 θ 告訴我們每一點上法線（normal）的方向，而第 (i) 部分則把這一點化為關於 $r(\theta)$ 的一階微分方程（differential equation），而且這個方程可以分離變量。

解答

第 (i) 部分

極坐標為 (r,θ) 的點，其笛卡兒坐標（Cartesian coordinates）為 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$。沿着曲線 $r = r(\theta)$，兩者都是 θ 的函數，由積法則（product rule）得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta.$$

由鏈式法則（chain rule，用於以參數表示的曲線），凡 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta \neq 0$ 之處，

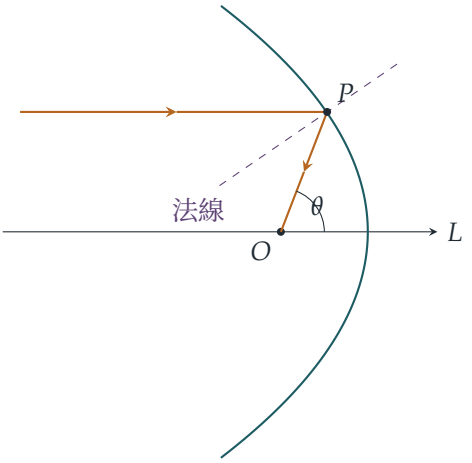
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\tan\theta + r}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} - r\tan\theta},$$

其中最後一步把分子和分母同時除以 $\cos\theta$，只要 $\cos\theta \neq 0$ 便可以這樣做。這就是所求的公式。

第 (ii) 部分

化為平面曲線問題。任取一個包含 L 的平面 Π，並在 Π 內取鏡面上的一點 P。經過 P 且平行於 L 的光線位於 Π 內，O 亦然；因此反射光線 PO 也位於 Π 內。P 處的法線平分 Π 內兩條直線的夾角，所以它也位於 Π 內。設鏡面與 Π 相交所得的曲線為 C；它在 P 處的切線（tangent）既在 Π 內，又在鏡面的切平面（tangent plane）內，所以與法線垂直。於是，在平面 Π 內，C 在 P 處的法線平分入射光線與反射光線的夾角：問題化為一個二維問題。

坐標。在 Π 內採用極坐標，以 O 為極點，始線（initial line）沿着 L，並選定方向使入射光線沿 $\theta = 0$ 的方向前進（如圖所示，光線來自 L 上鏡面開口以外的那一側）。設 $P = (r, \theta)$ 在 C 上。



法線的方向。從 P 出發，入射光線沿方向 $(-1, 0)$ 往回走，而反射光線沿方向 $(-\cos\theta, -\sin\theta)$ 射向 O。兩者都是單位向量（unit vector），所以它們的和指向兩者夾角的平分線（bisector）方向，亦即法線方向：

$$(-1-\cos\theta, -\sin\theta) = -2\cos\tfrac{\theta}{2}\,(\cos\tfrac{\theta}{2}, \sin\tfrac{\theta}{2}),$$

這裏用了 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ 和 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$。所以 P 處的法線與 L 成 $\frac{\theta}{2}$ 角，切線與法線垂直，而 C 在 P 處的斜率（gradient）為

$$m = -\cot\tfrac{\theta}{2}.$$

微分方程。記 $r' = \mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$, $t = \tan\theta$ 及 $\tau = \tan\frac{\theta}{2}$，於是 $t = \dfrac{2\tau}{1-\tau^2}$ 而 $m = -\dfrac{1}{\tau}$。由第 (i) 部分，

$$\frac{r't + r}{r' - rt} = m \quad\Longrightarrow\quad r'(t-m) = -r(1+mt) \quad\Longrightarrow\quad \frac{r'}{r} = -\frac{1+mt}{t-m}.$$

現在

$$1+mt = 1-\frac{2}{1-\tau^2} = -\frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}, \qquad t-m = \frac{2\tau}{1-\tau^2}+\frac{1}{\tau} = \frac{1+\tau^2}{\tau(1-\tau^2)},$$

因此

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \tan\tfrac{\theta}{2}.$$

? **想一想** 第 (i) 部分在 $\cos\theta = 0$ 之處失效。這會否留下漏洞？

不會。方程 $r'/r = \tan\frac{\theta}{2}$ 只涉及 θ 在 $-\pi < \theta < \pi$ 上的連續函數。除了孤立的值 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$（以及切線垂直的任何孤立點）可能例外，它在每一點都成立，所以由 r' 的連續性，它在這些點上同樣成立。（另一個做法是：半徑與切線之間的夾角 ψ 滿足 $\tan\psi = r/r'$，而由幾何關係可直接得出 $\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$，並無任何例外點。）

求解。兩邊積分，並注意當 $-\pi < \theta < \pi$ 時 $\cos\frac{\theta}{2} > 0$，

$$\ln r = \int \tan\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = -2\ln\cos\tfrac{\theta}{2} + \text{常數}, \qquad \text{所以} \qquad r = \frac{k}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2k}{1+\cos\theta}$$

其中 $k > 0$ 為常數（因為 $r > 0$）。令 $\ell = 2k$。於是 $r + r\cos\theta = \ell$，即 $r = \ell - x$。兩邊平方，並利用 $r^2 = x^2 + y^2$，

$$x^2 + y^2 = (\ell - x)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 = \ell^2 - 2\ell x.$$

這是一條以 L 為軸、以 O 為焦點（focus）的拋物線（parabola）（它就是 $Y^2 = 4aX$，其中 $X = \frac{\ell}{2} - x$, $a = \frac{\ell}{2}$，所以焦點位於 $x = \frac{\ell}{2} - a = 0$）。由於 Π 是任意一個包含 L 的平面，鏡面與每個這樣的平面都相交於一條拋物線，正如所求。（事實上，只有當鏡面是單一個旋轉拋物面（paraboloid of revolution）時，常數 ℓ 才會在每個平面內都相同；本題並不需要這一點。）

驗算

- 當 $\theta = 0$ 時得 $r = \frac{\ell}{2}$：頂點位於 O 與準線（directrix）$x = \ell$ 的正中間，這正是以 O 為焦點的拋物線應有的性質。
- 當 $\ell = 2$ 而 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時，該點為 $P = (0,2)$，$y^2 = 4 - 4x$ 在該處的斜率為 $-1 = -\cot\frac{\pi}{4}$，而把方向 $(1,0)$ 對這條切線作反射便得 $(0,-1)$，筆直向下射到 O。
- 數值驗證：第 (i) 部分的斜率公式在 2000 條隨機曲線上與有限差分（finite differences）的結果吻合（準確至 10^{-8}）；以龍格—庫塔法（Runge–Kutta）求解 $r' = r\tan\frac{\theta}{2}$，由 $r(0) = 1.35$ 出發，得 $r(2.5) = 13.5776380$，與 $2.7/(1+\cos 2.5)$ 相符；又在 1000 個隨機點上，把平行於 L 的光線經 $y^2 = \ell^2 - 2\ell x$ 反射後，光線都通過 O。

常見錯誤

- 取錯了角平分線：沿兩條光線背離 P 方向的兩個單位向量，其和給出法線；其差則給出切線。
- 忘記解釋為何問題是平面問題：經過 L 的平面包含入射光線和 O，因而也包含反射光線和法線。
- 寫成 $\ln r = -2\ln\cos\frac{\theta}{2}$ 而漏掉常數，這樣便失去了整族拋物線。

STEP 之外

方程 $r(1+\cos\theta) = \ell$ 是圓錐曲線（conic）的極坐標形式，其焦點位於極點，離心率（eccentricity）為 1；把 1 換成 e 便得到橢圓和雙曲線，而在極坐標下求解牛頓（Newton）方程時，行星軌道正是以這種形式出現的。這個反射論證也正是衛星碟形天線和汽車車頭燈採用拋物面的原因。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）就是以這種方法推導出圓錐曲線軌道的。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。