詳細解答

STEP II 1989，第 4 題

純數學 • 有理函數的描繪

> **STEP II 1989，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q4

關鍵思路

由線性因式相乘或相除而成的式子，最容易用取對數求導（logarithmic differentiation）的方法處理，因為對數會把它變成一個和。至於值域（range），不妨把問題倒過來問：對哪些 z，$\mathrm{f}(x) = z$ 有實數解？這條方程是 x 的二次方程（quadratic），所以答案來自判別式（discriminant）。之後的草圖，就由零點（zeros）、極點（poles）、$|x|$ 很大時的表現，以及是否有某些 z 值取不到來決定。

關於印出來的題目，要說明一點。條件 $a + d \neq c + d$ 只是說 $a \neq c$，這是我們早已知道的。實際用到的條件是 $a + b \neq c + d$，以下我們一直假設這個條件成立。

解答

導數

在 $\mathrm{f}(x) \neq 0$ 的地方，即 $x \neq a, b$（以及 $x \neq c, d$）時，我們可以對絕對值取對數（logarithms of moduli）：

$$\ln|\mathrm{f}(x)| = \ln|x-a| + \ln|x-b| - \ln|x-c| - \ln|x-d|.$$

求導，並利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x-k| = \frac{1}{x-k}$，得

$$\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c} - \frac{1}{x-d}.$$

現在乘以 x。當 $x \neq 0$ 時，每一項變成

$$\frac{x}{x-k} = \frac{1}{1-k/x} = \left(1 - \frac{k}{x}\right)^{-1},$$

於是得到所求的恆等式

$$\frac{x\,\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \left(1-\frac{a}{x}\right)^{-1} + \left(1-\frac{b}{x}\right)^{-1} - \left(1-\frac{c}{x}\right)^{-1} - \left(1-\frac{d}{x}\right)^{-1}.$$

$|x|$ 很大時

當 $|x|$ 遠大於 $|k|$ 時，由二項式展開（binomial expansion）得 $(1-k/x)^{-1} = 1 + \frac{k}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$。四個首項 1 互相抵消（$1+1-1-1=0$），餘下

$$\frac{x\,\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{a+b-c-d}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad \text{所以} \qquad \mathrm{f}'(x) = \frac{\mathrm{f}(x)}{x^2}\left[(a+b-c-d) + O\left(\tfrac{1}{x}\right)\right].$$

由於 $a+b-c-d \neq 0$，只要 $|x|$ 足夠大，方括號內的式子便與 $a+b-c-d$ 同號。另外，當 $|x| \to \infty$ 時 $\mathrm{f}(x) \to 1$，所以在那裏 $\mathrm{f}(x) > 0$，而且 $x^2 > 0$。因此，當 $|x|$ 很大時，在實數線的兩端，$\mathrm{f}'(x)$ 都與 $a+b-c-d$ 同號。

曲線位於漸近線（asymptote）$y=1$ 的哪一側，也值得記下來。直接計算，

$$\mathrm{f}(x) - 1 = \frac{(c+d-a-b)x + ab - cd}{(x-c)(x-d)} \approx \frac{c+d-a-b}{x} \quad \text{對於很大的} |x|,$$

而由分子可見，$\mathrm{f}(x) = 1$ 恰好只在一點成立，即 $x_0 = \dfrac{cd-ab}{c+d-a-b}$。

值域的條件：一個方法

把 $\mathrm{f}(x) = z$ 改寫成 $(x-a)(x-b) = z(x-c)(x-d)$，這就是二次方程

$$(1-z)x^2 - (a+b-(c+d)z)x + (ab - cdz) = 0.$$

- 這條方程的根不可能是 $x=c$ 或 $x=d$，因為左邊的 $(x-a)(x-b)$ 在那裏不等於零。所以二次方程的實根恰好就是 $\mathrm{f}(x)=z$ 的實數解。
- 當 $z \neq 1$ 時，方程有實根，當且僅當判別式 $\Delta(z) = \big(a+b-(c+d)z\big)^2 - 4(1-z)(ab-cdz)$ 滿足 ≥ 0。把它展開，乘以 $(c-d)^2 > 0$，再按 z 的冪次整理。設 $P=(a-c)(b-d)$ 和 $Q=(a-d)(b-c)$，有用的恆等式是 $P-Q=(a-b)(c-d)$，所以常數項 $(a-b)^2(c-d)^2$ 等於 $(P+Q)^2 - 4PQ$。於是題目給出的不等式正好就是 $(c-d)^2\Delta(z) \geq 0$。
- 當 $z=1$ 時，方程是線性的，x 的係數為 $c+d-a-b \neq 0$，所以有一個根；而不等式亦成立，因為兩邊相差 $(c-d)^2(a+b-c-d)^2 > 0$。

草圖

記 $G(z) = \left[(c-d)^2 z + P + Q\right]^2 - 4PQ$。當 z 變化時，平方項取遍 $[0, \infty)$ 內的每一個值，所以 G 的最小值是 $-4PQ$。因此：

$$\text{函數f 的值域是整個}\mathbb{R} \iff PQ \leq 0.$$

若 $PQ > 0$，則使 $G(z) < 0$ 的 z 值構成一個開區間，這些就是取不到的值。

> **想一想** 沒有實際的數值，我們怎樣知道 PQ 的正負？

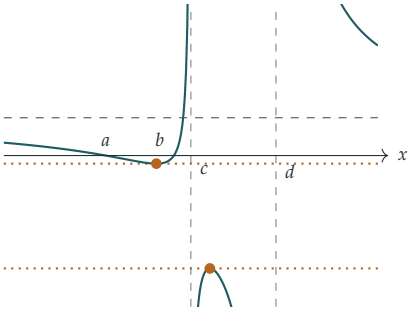
重新組合：$PQ = (a-c)(a-d) \cdot (b-c)(b-d)$。由於 $a < c < d$，第一對是兩個負數的積，所以是正數。於是 PQ 與 $(b-c)(b-d)$ 同號，而後者為負，恰好就是 b 位於兩個極點 c 與 d 之間的時候。一切都取決於 b 相對於 $c < d$ 的位置，以及 $a + b - c - d$ 的正負：

1. $a < b < c < d$：這時 $a + b < c + d$ 自動成立。
2. $a < c < b < d$：同樣有 $a + b < c + d$，因為 $a < c$ 而且 $b < d$。
3. $a < c < d < b$，並且 $a + b < c + d$。
4. $a < c < d < b$，並且 $a + b > c + d$。

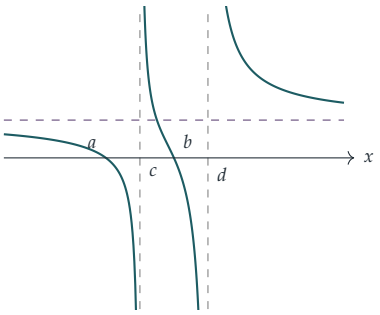
所以只有在情況 2，值域才是整個 $\mathbb{R}$。在情況 1、3 和 4，都有一個區間的值取不到。

還有一件工具，對找出轉向點（turning points）很有幫助。若 f 在 x_1 有駐點（stationary point），而 $\text{f}(x_1) = z_1$，則 x_1 是 $(x-a)(x-b) - z_1(x-c)(x-d) = 0$ 的重根（repeated root）。（當 $z_1 = 1$ 時這是線性方程，所以不可能發生。）有重根即是 $G(z_1) = 0$。所以駐點處的函數值恰好就是取不到的區間的兩個端點。在情況 2，$G > 0$ 恆成立，所以完全沒有駐點。

f 在每個極點兩側附近的正負，可以靠數一數負因式的個數得出。在每幅圖中，垂直虛線是極點 $x = c$、$x = d$，水平虛線是漸近線 $y = 1$，琥珀色的點線標出取不到的區間的兩個端點，也就是駐點（琥珀色圓點）處的函數值。各曲線是按特定數值（列於每幅圖下方）繪畫的，但在同一情況下，無論怎樣選取數值，形狀都是一樣的。



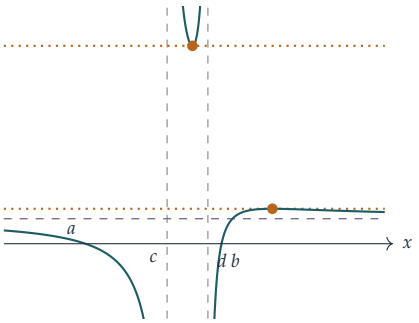
情況 1：$a, b, c, d = -2, 0, \frac{1}{2}, 3$



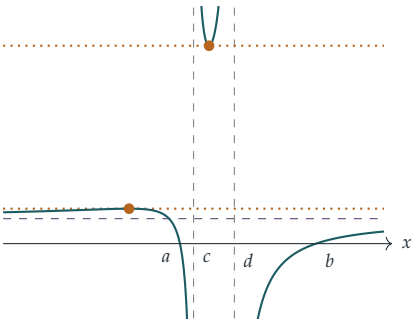
情況 2：$a, b, c, d = -1, 1, 0, 2$

情況 1（$a < b < c < d$）。 這裏在左邊遠處 $\mathrm{f} < 1$，在右邊遠處 $\mathrm{f} > 1$。在 $x < c$ 上，曲線由略低於 1 的位置進來，在 a 處降至 0，在 a 與 b 之間下探至一個負的極小值，然後上升穿過 b，在 c 處趨向 $+\infty$。在兩個極點之間，分母的兩個因式異號，而分子為正，所以在兩端都有 $\mathrm{f} \to -\infty$，中間有一個負的局部極大值（local maximum）。在 d 的右邊，曲線由 $+\infty$ 下降至 1。(c, d) 上的局部極大值低於 (a, b) 上的局部極小值（local minimum），嚴格介乎兩者之間的值都取不到。值域不是整個 $\mathbb{R}$。

情況 2（$a < c < b < d$）。 這裏沒有駐點。曲線由略低於 1 的位置下降，穿過 a，在 c 處趨向 $-\infty$；然後由 $+\infty$ 穿過 b，在 d 處趨向 $-\infty$；再由 $+\infty$ 下降至 1。單是中間的一支已經取遍所有實數值。值域是整個 $\mathbb{R}$。



情況 3：$a, b, c, d = -3, 2, 0, \frac{3}{2}$



情況 4：$a, b, c, d = -\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, 0, \frac{3}{2}$

情況 3（$a < c < d < b$，$a + b < c + d$）。 在 $x < c$ 上，曲線由略低於 1 的位置下降，穿過 a，趨向 $-\infty$。在兩個極點之間，分子為負，所以在兩端都有 $\mathrm{f} \to +\infty$，中間有一個局部極小值 m。在 d 的右邊，曲線由 $-\infty$ 上升穿過 b，在 x_0 處穿過 $y = 1$，到達略高於 1 的局部極大值 M，然後從上方回落至 1。(M, m) 內的值都取不到，其中 $1 < M < m$。值域不是整個 $\mathbb{R}$。

情況 4（$a < c < d < b$，$a + b > c + d$）。 這是把情況 3 的外側表現對調。在左邊遠處，f 略高於 1 並且遞增。它到達局部極大值 $M > 1$，在 $x_0 < a$ 處穿過 $y = 1$，再下降穿過 a，在 c 處趨向 $-\infty$。中間的一支與之前一樣呈 U 形，極小值為 m。在 d 的右邊，曲線由 $-\infty$ 上升穿過 b，從下方趨向 1。(M, m) 同樣取不到。值域不是整個 $\mathbb{R}$。

驗算

- 恆等式：隨機選取 a, b, c, d, x，用有限差分（finite difference）估算 $x\mathrm{f}'(x)/\mathrm{f}(x)$，結果與右邊相符，誤差約為 10^{-9}。

- 情況 1，取 $a,b,c,d=-2,0,\frac{1}{2},3$：這裏 $P=\frac{15}{2}$，$Q=\frac{5}{2}$，$(c-d)^2=\frac{25}{4}$，而 $G(z)=0$ 給出 $z=-\frac{8}{5}\pm\frac{4}{5}\sqrt{3}$，約為 -0.2144 和 -2.9856。這正好就是解 $\mathrm{f}'(x)=0$ 所得的駐點處的函數值（在 $x\approx-0.515$ 和 $x\approx1.060$）。在 4×10^5 個點上對 f 取樣，沒有一個值嚴格落在兩者之間。
- 情況 3 和 4（圖中所用的數值）：取不到的區間是 $(1.4007, 7.9327)$，同樣與駐點處的函數值吻合。在情況 2，$\mathrm{f}'(x)=0$ 沒有實數解。

常見錯誤

- 忘記了 $\mathrm{f}(x)=z$ 只在 $z\neq1$ 時才是二次方程：$z=1$ 這個值需要另外交代一句。
- 以為曲線在兩端都從同一側趨近 $y=1$。事實並非如此：$\mathrm{f}-1\approx(c+d-a-b)/x$ 的正負隨 x 而改變。

STEP 之外

把「f 的值域是甚麼？」變成「對哪些 z，$\mathrm{f}(x)=z$ 有解？」，就是原像（preimage）的想法；而觀察到駐點處的函數值正是兩個解合而為一的地方，則是臨界值（critical values）理論的起點。像這樣的 2 次有理函數（rational function）是一個二對一的映射，它在複數上的表現要簡潔得多：在複數上，每個值（按重數（multiplicity）計算）都恰好取到兩次。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 把這種幾何觀點發揮得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。