詳細解答

STEP II 1989，第 3 題

純數學 • 複雙曲函數映射

> **STEP II 1989，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q3

關鍵思路

右邊是 $2\sinh(x+\mathrm{i}y)$，所以整道題目其實是在研究映射（map）$u+\mathrm{i}v=\sinh(x+\mathrm{i}y)$。把和的 sinh 展開，便可分成實部（real part）和虛部（imaginary part），從而明確寫出 u 和 v。固定 x 或 y 之後，剩下的是一條參數曲線（parametric curve），再利用恆等式 $\cos^2+\sin^2=1$ 和 $\cosh^2-\sinh^2=1$ 便可消去參數。

解答

求 u 和 v

兩邊除以 2，得 $u+\mathrm{i}v=\sinh(x+\mathrm{i}y)$。利用 $\sinh(\mathrm{i}y)=\mathrm{i}\sin y$ 和 $\cosh(\mathrm{i}y)=\cos y$，

$$\begin{aligned}\sinh(x+\mathrm{i}y)&=\sinh x\cosh(\mathrm{i}y)+\cosh x\sinh(\mathrm{i}y)\\&=\sinh x\cos y+\mathrm{i}\cosh x\sin y.\end{aligned}$$

（如果你喜歡，也可以直接展開 $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)-\mathrm{e}^{-x}(\cos y-\mathrm{i}\sin y))$；結果完全一樣。）由於 x、y、u、v 全是實數，比較實部和虛部可得

$$u=\sinh x\cos y,\qquad v=\cosh x\sin y.$$

直線 $x=a$

固定 $x=a$ 而讓 y 任意變化，則 $u=\sinh a\cos y$，$v=\cosh a\sin y$。由於 $a>0$，$\sinh a$ 和 $\cosh a$ 都是正數，所以可以相除：

$$\left(\frac{u}{\sinh a}\right)^2+\left(\frac{v}{\cosh a}\right)^2=\cos^2 y+\sin^2 y=1.$$

反過來，這個橢圓（ellipse）上的每一點都可以寫成 $(\sinh a\cos y, \cosh a\sin y)$ 的形式（對某個 y），因為這正是橢圓的標準參數表示（parametrisation）。所以直線 $x = a$ 對應整個橢圓（y 每走過一個長度為 2π 的區間，橢圓便被描畫一次），其半軸（semi-axes）沿 u 軸方向為 $\sinh a$，沿 v 軸方向為 $\cosh a$。

直線 $y = b$

現在固定 $y = b$ 而讓 x 任意變化：$u = \sinh x\cos b$，$v = \cosh x\sin b$。題目給出 $0 < \sin b < 1$，所以 $\sin b \neq 0$，而且 $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b > 0$，所以 $\cos b \neq 0$ 亦成立。相除後得

$$\left(\frac{v}{\sin b}\right)^2 - \left(\frac{u}{\cos b}\right)^2 = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

這是一條雙曲線（hyperbola），其軸沿 v 軸，頂點（vertices）位於 $(0, \pm\sin b)$。

> **想一想** 為甚麼只有一支？這一支又是否全部都被覆蓋？

由於 $\cosh x > 0$ 且 $\sin b > 0$，必有 $v > 0$：只能到達上面的一支。而且這一支上的每一點都能到達：任取上支上的一點 (u, v)，選 $x = \sinh^{-1}(u/\cos b)$，使得 $\sinh x\cos b = u$；這時 $\cosh x\sin b$ 就是雙曲線方程對於這個 u 的正根，亦即 v。所以直線 $y = b$ 恰好對應其中一支，即 $v > 0$ 的那一支。

交點與直角

點 $x = a$、$y = b$ 同時在兩條直線上，所以它的像（image）同時在兩條曲線上：

$$(u, v) = (\sinh a\cos b,\ \cosh a\sin b).$$

要找出兩條曲線在該點的方向，可把每個參數表示對各自的參數求導（differentiate）。沿橢圓（$x = a$，參數為 y），在 $y = b$ 處：

$$\mathbf{t}_1 = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right) = (-\sinh a\sin b,\ \cosh a\cos b).$$

沿雙曲線（$y = b$，參數為 x），在 $x = a$ 處：

$$\mathbf{t}_2 = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) = (\cosh a\cos b,\ \sinh a\sin b).$$

兩個向量都不是零向量，因為它們各有一個分量是 $\cosh a\cos b \neq 0$，所以兩者都是真正的切向量（tangent vectors）。它們的純量積（scalar product）是

$$\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 = -\sinh a\sin b\cosh a\cos b + \cosh a\cos b\sinh a\sin b = 0,$$

所以橢圓與雙曲線的這一支在該點正交，正如題目所求。

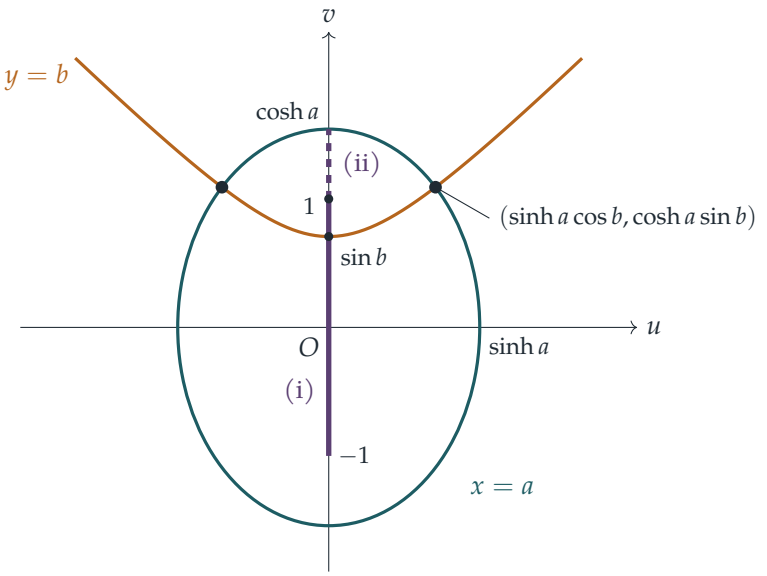
（由於兩條曲線都具有 $u \mapsto -u$ 的對稱性，它們在 $(-\sinh a\cos b, \cosh a\sin b)$ 亦正交；這一點是 $x = -a$、$y = b$ 的像，也同樣是 $x = a$、$y = \pi - b$ 的像。）

略圖

(i) $x = 0$ 給出 $u = 0$，$v = \sin y$：即 v 軸上由 $(0, -1)$ 至 $(0, 1)$ 的線段。留意它是橢圓在 $a \to 0$ 時的極限，因為 $\sinh a \to 0$ 而 $\cosh a \to 1$。

(ii) $y = \frac{1}{2}\pi$，$0 \le x \le a$ 給出 $u = 0$，$v = \cosh x$，其值由 1 遞增至 $\cosh a$：即 v 軸上由 $(0, 1)$ 向上至橢圓頂端 $(0, \cosh a)$ 的線段。

雙曲線這一支的頂點在 $(0, \sin b)$，位於線段 (i) 上。略圖中取 $a = 1$，$b = \frac{1}{4}\pi$。



線段 (i) 以實線表示，線段 (ii) 以虛線表示；兩者合起來沿 v 軸由 -1 一直向上伸延至橢圓頂端。假如改為取 $y = \frac{1}{2}\pi$ 而讓 x 取遍所有實數，便會得到 v 軸上的射線 $v \ge 1$，而且重複覆蓋兩次；這就是題目排除了的退化情況 $\sin b = 1$。

驗算

- 兩條圓錐曲線(conics)的焦點(foci)都在 $(0, \pm 1)$：橢圓方面是因為 $\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$，雙曲線方面是因為 $\sin^2 b + \cos^2 b = 1$。共焦（confocal）的橢圓和雙曲線必定正交，與我們的結果吻合。
- 數值上，取 $a = 1$，$b = \frac{1}{4}\pi$：$\sinh(1 + \frac{1}{4}\pi\mathrm{i}) \approx 0.8310 + 1.0911\mathrm{i}$，與 $(\sinh 1 \cos \frac{1}{4}\pi,\ \cosh 1 \sin \frac{1}{4}\pi)$ 相符。我們亦在許多隨機選取的 (a, b) 上驗證了兩條曲線的方程，以及純量積為零。

常見錯誤

- 把 $\sinh(\mathrm{i}y) = \sin y$ 寫成等式，而不是 $\mathrm{i}\sin y$，結果把 u 和 v 的角色對調了。
- 只說「一條雙曲線」，卻沒有解釋為甚麼只出現 $v > 0$ 的那一支。
- 除以 $\cos b \neq 0$ 之前忘記檢查這個條件；條件 $\sin b < 1$ 正是為此而設。

STEP 之外

映射 $z \mapsto \sinh z$ 是保角（conformal）的：凡是導數不為零的地方，它都保持角度不變，所以由直線 $x =$ 常數 和 $y =$ 常數 組成的垂直網格，必定變成由曲線組成的垂直網格，在這裏就是共焦的橢圓和雙曲線。這就是為甚麼在平板或狹縫周圍求解拉普拉斯方程（Laplace's equation）時，會出現這類「橢圓坐標」（elliptic coordinates）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）把保角映射講解得十分精彩，書中有許多正是這一類的圖。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。