詳細解答

STEP II 1989，第 2 題

純數學 • 冪級數的係數

> **STEP II 1989，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q2

關鍵思路

一條把函數在 x 處的值與同一函數在 $2x$ 處的值聯繫起來的三角恆等式（trigonometric identity），會化為冪級數（power series）係數之間的關係。把 x 換成 $2x$，x^n 的係數就乘以 2^n，所以只要把兩邊都寫成冪級數，便可以比較係數（compare coefficients），直接讀出所求的關係。有用的竅門是先把整條式乘以 x，使每一項都是在 0 處確實具有冪級數的函數。

解答

以下一律假設 x 很小而且不等於零，因此下面出現的每個級數都收斂（converge）（所涉及的函數在例如 $0 < |x| < \frac{\pi}{4}$ 的範圍內性質都良好）。兩個收斂的冪級數若在 0 附近的一個區間上相等，它們的係數就相等，所以我們可以比較 x^n 的係數。

a_{n-1} 與 b_n 之間的關係

首先驗證 $(*)$：

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\cot 2x.$$

乘以 x：

$$x\cot x - x\tan x = (2x)\cot(2x).$$

現在把每一項寫成級數。

- $x\cot x = 1 + \sum_{n\geq 1} b_n x^n$。

- $x\tan x = \sum_{m\geq 0} a_m x^{m+1} = \sum_{n\geq 1} a_{n-1}x^n$，其中取 $n = m+1$。
- 由於只要 x 很小，$2x$ 也很小，我們可以在 $x\cot x$ 的級數中把 x 換成 $2x$：

$$(2x)\cot(2x) = 1 + \sum_{n\geq 1} b_n (2x)^n = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^n b_n x^n.$$

因此

$$1 + \sum_{n\geq 1} (b_n - a_{n-1})x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^n b_n x^n.$$

常數項相等，而對 $n \geq 1$ 比較 x^n 的係數，得 $b_n - a_{n-1} = 2^n b_n$，即

$$a_{n-1} = (1-2^n)\, b_n \qquad (n \geq 1),$$

這正是所要證明的結果。

想一想 為甚麼要先乘以 x 才展開，而不直接處理 $\cot x$ 本身？

$\cot x$ 在 0 處趨向無窮大，所以在該處沒有冪級數；題目只給了我們 $x\cot x$ 的級數。把整條恆等式乘以 x 之後，每一項都成為「具有冪級數的函數」的形式，而右邊的餘切項變成 $(2x)\cot(2x)$，也就是同一個函數在 $2x$ 處的值。這正是我們需要的形式。

係數 c_n

與之配對的恆等式是把差換成和：

$$\cot x + \tan x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\operatorname{cosec} 2x.$$

再次乘以 x，

$$x\cot x + x\tan x = (2x)\operatorname{cosec}(2x).$$

利用與先前相同的展開式，以及把 x 換成 $2x$ 後的 $x\operatorname{cosec} x$ 的級數，

$$1 + \sum_{n\geq 1} (b_n + a_{n-1})x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^n c_n x^n,$$

所以對 $n \geq 1$ 有

$$2^n c_n = b_n + a_{n-1}.$$

現在用第一個結果消去 b_n。由於 $n \geq 1$，$1 - 2^n \neq 0$，所以 $b_n = \dfrac{a_{n-1}}{1-2^n}$，於是

$$2^n c_n = a_{n-1}\left(\frac{1}{1-2^n} + 1\right) = a_{n-1}\frac{2-2^n}{1-2^n} = a_{n-1}\frac{2\,(2^{n-1}-1)}{2^n - 1}.$$

除以 2^n，並利用 $2/2^n = 1/2^{n-1}$，

$$c_n = \frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\,a_{n-1} \qquad (n \geq 1),$$

這就是所求的結果。

驗算

由 $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$ 可得 $a_1 = 1$，$a_3 = \frac{1}{3}$。第一個結果預測 $b_2 = a_1/(1-4) = -\frac{1}{3}$ 和 $b_4 = a_3/(1-16) = -\frac{1}{45}$，與 $x\cot x = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \cdots$ 吻合。第二個結果預測 $c_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}$ 和 $c_4 = \frac{7}{15}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{360}$，與 $x\operatorname{cosec} x = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + \cdots$ 吻合。另外留意 $n = 1$ 的情況：$a_0 = 0$ 而 $b_1 = c_1 = 0$，與兩條公式都一致。我們把 sin 和 cos 的級數相除，以分數作精確計算，對所有 $n \le 23$ 驗證了這兩個關係，並用 $\tan 0.3 \approx 0.309336$ 和 $0.3\operatorname{cosec} 0.3 \approx 1.015159$ 核對了這些級數。

常見錯誤

- 忘記下標的平移：$x\tan x$ 中 x^n 的係數是 a_{n-1}，而不是 a_n。
- 在 $x\cot x$ 中以 $2x$ 代替 x 時，卻寫成 $2x\cot x$ 或 $x\cot 2x$；恆等式中的那一項必須恰好是 $(2x)\cot(2x)$。
- 除以 $1 - 2^n \neq 0$ 之前，沒有指出這一點。

STEP 之外

這裏的係數，除了相差一些簡單的因子之外，就是伯努利數（Bernoulli numbers）：$x\cot x = \sum_{k\ge 0}(-1)^k \frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k}$，而題目中的關係則以伯努利數表示出正切和餘割的級數。兩個冪級數若在 0 附近相等，便可以令它們的係數相等，這個事實（冪級數的恆等定理（identity theorem））會在大學第一個分析課程中證明。想進一步了解，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析學入門教材）中關於冪級數的部分，以及 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以幾何直觀講解複分析的著作），這些展開式在書中會從複函數自然地產生。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。