詳細解答

STEP II 1989，第 15 題

概率與統計 • 幾何概率

> **STEP II 1989，第 15 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q15

關鍵思路

「在周界上隨機」選取的一點，是按長度均勻分佈（uniform distribution）的，所以一切都由總長度 $\pi+2$ 出發。三角形總有一個頂點在圓心 O，所以它的面積是 $\frac{1}{2}ab\sin C$，其中 a 和 b 是兩點與 O 的距離，C 是在 O 處的夾角。這樣，每個條件情況都化為一個簡單的期望值（expectation），再用全期望定律（law of total expectation）把它們合併起來。

解答

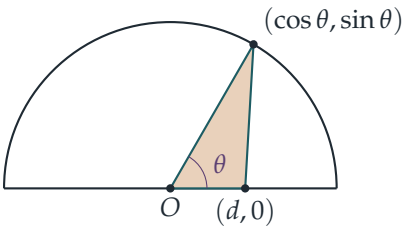
把 O 放在原點，直徑沿 x 軸由 $(-1,0)$ 到 $(1,0)$，圓弧位於 $y\geq 0$。周界的長度是 $2+\pi$：直徑佔 2，圓弧佔 π。由於每一點都沿周界均勻分佈，

$$\mathrm{P}(\text{一點落在直徑上})=\frac{2}{\pi+2},\qquad \mathrm{P}(\text{一點落在圓弧上})=\frac{\pi}{\pi+2}.$$

已知該點落在圓弧上時，它是 $(\cos\theta,\sin\theta)$，其中 θ 在 $[0,\pi]$ 上均勻分佈。已知該點落在直徑上時，它是 $(d,0)$，其中 d 在 $[-1,1]$ 上均勻分佈。

兩點互相獨立（independent），而「恰好一點在直徑上」可以是第一點在直徑上，也可以是第二點在直徑上，所以

$$\mathrm{P}(\text{恰好一點在直徑上})=2\cdot\frac{2}{\pi+2}\cdot\frac{\pi}{\pi+2}=\frac{4\pi}{(\pi+2)^2}.$$



第 (i) 部分

設其中一點是直徑上的 $(d,0)$，另一點是圓弧上的 $(\cos\theta,\sin\theta)$。由 O 出發的兩條邊長度分別是 $|d|$ 和 1，它們之間的夾角是 θ（若 $d<0$，夾角是 $\pi-\theta$，其正弦值相同）。所以

$$A=\tfrac{1}{2}\,|d|\sin\theta.$$

在這個情況下，d 和 θ 互相獨立，所以乘積的期望值等於期望值的乘積。由於 d 在 $[-1,1]$ 上均勻分佈，$|d|$ 在 $[0,1]$ 上均勻分佈，故 $\mathrm{E}|d|=\frac{1}{2}$。另外，

$$\mathrm{E}(\sin\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{\pi}.$$

因此

$$\mathrm{E}(A\mid\text{恰好一點在直徑上})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{1}{2\pi},$$

正是所求。

第 (ii) 部分

現在兩點都在圓弧上，角度分別是 θ_1 和 θ_2，兩者互相獨立，並在 $[0,\pi]$ 上均勻分佈。兩點與 O 的距離都是 1，而它們在 O 處的夾角是 $X=|\theta_1-\theta_2|$，位於 $[0,\pi]$ 之內。所以

$$A=\tfrac{1}{2}\sin X.$$

? **想一想** 為甚麼我們可以使用題目給出的 X 的密度函數？

角 θ 量度的是沿單位半圓的弧長，所以在圓弧上均勻地選取兩點，等同於在一條長度為 π 的線段上均勻地選取兩點。角 X 正是兩點之間的距離，所以 X 在 $[0,\pi]$ 上的密度函數（density）是 $2(\pi-x)/\pi^2$。於是

$$\mathrm{E}(\sin X)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin x\,\mathrm{d}x.$$

把積分拆開，$\int_0^{\pi}\pi\sin x\,\mathrm{d}x=2\pi$；再取 $u=x$ 作分部積分（integration by parts），

$$\int_0^{\pi}x\sin x\,\mathrm{d}x=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x=\pi+0=\pi.$$

所以 $\int_0^\pi (\pi - x)\sin x\,\mathrm{d}x = 2\pi - \pi = \pi$，由此得 $\mathrm{E}(\sin X) = \dfrac{2}{\pi}$，以及

$$\mathrm{E}(A \mid \text{兩點都不在直徑上}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi},$$

正是所求。

A 的期望值

還有第三種情況：若兩點都落在直徑上，這個「三角形」是退化（degenerate）的（三點都在 x 軸上），所以 $A = 0$。兩點都不在直徑上的概率是 $\left(\frac{\pi}{\pi+2}\right)^2$。根據全期望定律，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(A) &= \frac{4\pi}{(\pi+2)^2}\cdot\frac{1}{2\pi} + \frac{\pi^2}{(\pi+2)^2}\cdot\frac{1}{\pi} + \frac{4}{(\pi+2)^2}\cdot 0\\ &= \frac{2+\pi}{(\pi+2)^2}\\ &= \frac{1}{2+\pi},\end{aligned}$$

這就是我們要證明的結果。

驗算

- 三種情況的概率 $\frac{4}{(\pi+2)^2}$、$\frac{4\pi}{(\pi+2)^2}$ 和 $\frac{\pi^2}{(\pi+2)^2}$ 相加得 $\frac{(2+\pi)^2}{(\pi+2)^2} = 1$。
- $\mathrm{E}(A) \le \frac{1}{2}$，即不超過最大可能的面積（兩條半徑互相垂直），這是必然的；事實上 $\frac{1}{2+\pi} \approx 0.1945$。
- 以蒙地卡羅模擬（Monte Carlo simulation）抽取 2×10^6 對點，得出 P(恰好一點) $\approx$ 0.4757（準確值為 0.4754），條件平均值為 0.1591 和 0.3184（準確值為 $\frac{1}{2\pi} \approx 0.1592$ 和 $\frac{1}{\pi} \approx 0.3183$），以及 $\mathrm{E}(A) \approx 0.1944$。

常見錯誤

- 在 P(恰好一點) 中漏掉因子 2：兩點之中任何一點都可以是落在直徑上的那一點。
- 把「在直徑上」的概率當作 $\frac{1}{2}$：選點是按長度均勻分佈，而不是按落在邊界的哪一段來平均分配。
- 在第 (ii) 部分使用 $\sin\theta_1\sin\theta_2$ 或類似的式子，而不是兩條半徑之間夾角的正弦。

STEP 之外

把期望值按各種情況的劃分（partition）拆開，即 $\mathrm{E}(A) = \sum_i \mathrm{E}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)$，就是全期望定律，它是大學一年級概率論中最常用的工具之一；其一般形式 $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(A \mid Y)\big)$ 更是無處不在，由分支過程（branching processes）到馬可夫鏈（Markov chains）都會用到。第 (ii) 部分引用的 X 的密度函數，本身就是一道不錯的練習：它來自正方形 $[0, \pi]^2$ 內一條帶狀區域的面積。這類題目屬於幾何概率（geometric probability）；Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）以合適的程度講解條件期望（conditional expectation）和聯合密度函數（joint densities）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。