詳細解答

STEP II 1989，第 14 題

力學 • 圓周運動

STEP II 1989，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

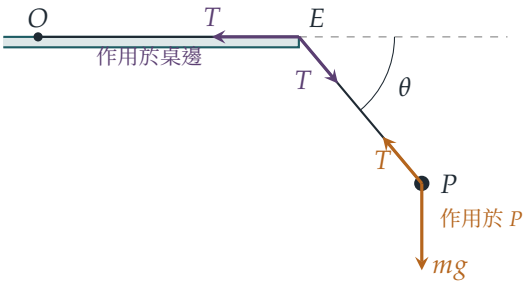
step.maths.org/questions/89-s2-q14

關鍵思路

質點一經釋放，繩子留在桌面上的那一段便保持不動：它在固定端與桌邊之間被拉緊。因此桌邊相當於一個固定的支點，質點繞着它沿半徑為 a 的圓運動，情況與由水平位置釋放的單擺（simple pendulum）完全相同。由能量可求得速率，由徑向運動方程（radial equation of motion）可求得張力（tension）。桌邊是光滑的，所以繩子在桌邊兩側的張力相同，而作用於桌邊的力，就是沿兩段繩子拉扯的兩個相等張力的向量和。

解答

模型。 繩子是輕而不可伸長的（light and inextensible），桌面光滑而且很薄，質點是一個點質量（point mass）。設 O 為繩子的固定端，E 為繩子跨過桌邊的那一點，於是 $OE = l - a$，而懸垂部分 EP 的長度為 a。設 θ 為懸垂部分從水平方向（即它起初所指、背離桌子的方向）向下轉過的角。



由於 O 固定，而繩子一直保持拉緊（下文會驗證 $T > 0$），OE 這一段留在桌面上靜止不動。因此 P 沿以 E 為圓心、半徑為 a 的圓運動。

速率。 桌面光滑，而張力始終與 P 的運動方向垂直，所以兩者都不作功，機械能守恆（conservation of mechanical energy）。當繩子轉過角 θ 時，P 下降了高度 $a\sin\theta$，故由靜止開始，

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mga\sin\theta \qquad \Longrightarrow \qquad v^2 = 2ga\sin\theta.$$

張力。 沿 PE 向圓心 E 的方向分解：張力沿 PE 作用，而重量沿 PE 的分量為 $mg\sin\theta$，方向背離 E（當 $0<\theta<\pi$ 時，P 位於 E 的水平以下）。所以

$$T - mg\sin\theta = \frac{mv^2}{a} = 2mg\sin\theta, \qquad \text{由此得} \qquad \boxed{T = 3mg\sin\theta.}$$

當 $0<\theta<\pi$ 時這個值為正，所以繩子自始至終保持拉緊。在 $\theta=\pi$ 時有 $v=0$：質點剛好到達桌子底面、與 E 同高的位置，然後往回擺。因此運動發生在 $0\le\theta\le\pi$ 的範圍內。

作用於桌邊的力。 桌邊光滑，所以繩子在桌邊兩側的張力都是 T。繩子以兩個大小為 T 的拉力壓在桌邊上：一個沿 EO，水平指向固定端；另一個沿 EP。取 x 軸為水平背離桌子的方向，y 軸為鉛垂向上。沿 EO 和 EP 的單位向量（unit vector）分別是 $(-1,0)$ 和 $(\cos\theta,-\sin\theta)$，所以作用於桌邊的力為

$$\mathbf{F} = T\,(\cos\theta - 1,\ -\sin\theta).$$

它的大小為

$$|\mathbf{F}| = T\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta} = T\sqrt{2-2\cos\theta} = 2T\sin\tfrac{\theta}{2}$$

這裏用了 $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$，以及當 $0\le\theta\le\pi$ 時 $\sin\frac{\theta}{2}\ge 0$。（從幾何上看，兩個夾角為 $\pi-\theta$ 的相等的力 T，合力為 $2T\cos\frac{\pi-\theta}{2}$，結果相同。）代入 T 和 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$，

$$|\mathbf{F}| = 6mg\sin\theta\sin\tfrac{\theta}{2} = 12mg\,s^2\sqrt{1-s^2}, \qquad \text{其中} s=\sin\tfrac{\theta}{2}\in[0,1].$$

想一想 怎樣才能乾淨俐落地求 $s^2\sqrt{1-s^2}$ 的最大值？

由於它是非負的，只需求它的平方的最大值，即 $h(u) = u^2(1-u)$，其中 $u = s^2 \in [0,1]$。於是 $h'(u) = 2u-3u^2 = u(2-3u)$，當 $0<u<\frac{2}{3}$ 時為正，當 $\frac{2}{3}<u\le 1$ 時為負。所以 h 在 $[0,1]$ 上的最大值出現在 $u=\frac{2}{3}$，此時 $h = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{27}$。因此 $s^2\sqrt{1-s^2}$ 的最大值為 $\sqrt{4/27} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$，而

$$|\mathbf{F}|_{\max} = 12mg\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{8mg}{\sqrt{3}},$$

正如所求。它出現在 $\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{2}{3}$ 時，即 $\cos\theta = 1-2\sin^2\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{3}$，所以 $\theta\approx 109.5^\circ$：這時質點已經越過桌邊的正下方，正往桌子底下擺回去。

驗算

- 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$（繩子鉛垂）時，速率為 $\sqrt{2ga}$，而 $T = 3mg$，這正是由水平位置釋放的單擺的熟悉結果。這時作用於桌邊的力為 $T\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\,mg \approx 4.24mg$，略小於 $8mg/\sqrt{3} \approx 4.62mg$，與最大值出現在鉛垂位置之後這一點吻合。
- 在 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 時，質點在與桌邊同高的位置瞬時靜止，所以 $T = 0$，桌邊不受任何力，與公式所示一致。
- 我們對運動方程 $\ddot{\theta} = (g/a)\cos\theta$ 作了數值積分：由徑向方程求得的 T 與 $3mg\sin\theta$ 相符，誤差在 10^{-12} 以內；而作用於桌邊的力的最大值出現在 $\theta \approx 1.9106$（即 $\arccos(-\frac{1}{3})$），其值為 $4.6188\,mg$，與 $8/\sqrt{3}$ 相符。

常見錯誤

- 把作用於桌邊的力當作只有 T，或只取懸垂繩子拉力的鉛垂部分。桌面上的那段繩子也會水平地拉扯桌邊，兩個拉力必須以向量方式相加。
- 求最大值時只考慮到 $\theta \le \frac{\pi}{2}$ 為止。質點會繼續擺到桌子底下，而最大值正是出現在這個較後的階段。

STEP 之外

這裏的張力是一種*約束力*（constraint force）：它不作功，其大小恰好足以令質點保持在圓周上。在拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）中，這類力會從運動方程中完全消失，事後才再求回來（就像我們利用徑向方程所做的那樣），或者藉拉格朗日乘數（Lagrange multipliers）求得。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）在這個程度上對圓周運動、約束和能量方法有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。