詳細解答

STEP II 1989，第 13 題

力學 • 轉動慣量

> **STEP II 1989，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q13

本題在 *Beyond STEP* 第 11.7 節桿中的辛普森法則中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/simpsons-rod.html

關鍵思路

一切都建基於轉動慣量（moment of inertia）的兩個事實。平行軸定理（parallel axis theorem）指出，對任何一條軸的轉動慣量，都由質量、質心（centre of mass）以及對通過質心的平行軸的轉動慣量所決定。此外，轉動慣量具有可加性（additive），所以我們可以把一個物體切成若干小塊，再把每一塊換成等效的東西。薄片（lamina）就是一疊幼桿，所以只要知道怎樣替換一根桿，就能替換整塊薄片。

解答

對每一條軸均等效

設 ℓ 為任意一條軸，並設 ℓ_O 為通過 O 的平行軸，與 ℓ 相距 d。物體與質點（particle）系統的質量同為 m，質心同為 O，所以可以對兩者分別應用平行軸定理：

$$I_\ell^{\text{物體}} = I_{\ell_O}^{\text{物體}} + md^2, \qquad I_\ell^{\text{質點}} = I_{\ell_O}^{\text{質點}} + md^2.$$

由於 ℓ_O 通過 O，根據假設 $I_{\ell_O}^{\text{物體}} = I_{\ell_O}^{\text{質點}}$。因此兩式的右邊相等，於是對每一條軸 ℓ 都有 $I_\ell^{\text{物體}} = I_\ell^{\text{質點}}$，這正是所要證明的。

均勻桿

把均勻桿（uniform rod）沿 x 軸放置，由 $x=-a$ 伸展至 $x=a$，於是它的質心 O 就是原點。在 $x=-a$、0、a 處分別放置質量為 p、q、r 的質點。要令總質量為 m 且質心位於 O，我們需要

$$p+q+r=m, \qquad -pa+ra=0,$$

所以 $r=p$ 及 $q=m-2p$。

現在取任意一條通過 O、與桿成角 θ 的軸。桿上位於 x 的一點與這條軸的距離為 $|x|\sin\theta$。因此，對任何一條通過 O 的軸，轉動慣量都是 $\sin^2\theta$ 乘以 $\sum(\text{質量})\,x^2$，我們只需令這一個和相等便可。對於桿，每個微元的質量為 $\frac{m}{2a}\,\mathrm{d}x$，所以

$$\int_{-a}^{a}\frac{m}{2a}\,x^2\,\mathrm{d}x=\frac{m}{2a}\cdot\frac{2a^3}{3}=\tfrac{1}{3}ma^2,$$

而對於質點，這個和是 $pa^2+q\cdot 0+pa^2=2pa^2$。當 $p=\frac{1}{6}m$ 時，兩者對每個 θ 都相等。所以這根桿動力等效（dynamically equivalent）於

$$\tfrac{1}{6}m \text{ 於每一端}, \qquad \tfrac{2}{3}m \text{ 於中點}.$$

根據第一部分，兩者對任何一條軸的轉動慣量都相同，而不限於通過 O 的軸。

長方形薄片

設長方形的中心為 O，邊長為 $2a$（平行於 x 軸）及 $2b$，於是它每單位面積的質量為 $M/(4ab)$。把它切成平行於 x 軸的幼條。位於高度 y、闊度為 δy 的幼條是一根長度為 $2a$、質量為 $\delta M=\frac{M}{2b}\,\delta y$ 的均勻桿。

> **想一想** 幼條的中心並不在 O。為甚麼我們仍然可以把每條幼條換成它的三個質點？

第一部分的用處正在於此。每條幼條與它的三個質點對每一條軸的轉動慣量都相同，而不只是對通過幼條本身中心的軸。轉動慣量可以相加，所以對任何一條軸，薄片的轉動慣量都與全部替換質點所組成的系統相同。這個系統的總質量同樣是 M，質心同樣是 O，因為每條幼條的替換質點與該幼條有相同的質量和質心。

位於高度 y 的幼條換成：在 $(\pm a,y)$ 兩點各放 $\frac{1}{6}\delta M=\frac{M}{12b}\,\delta y$，以及在 $(0,y)$ 放 $\frac{2}{3}\delta M=\frac{M}{3b}\,\delta y$。當 y 由 $-b$ 變到 b 時，這些質點填滿三根長度為 $2b$ 的均勻桿：

- 沿兩邊 $x=\pm a$ 各有一根，每根的質量為 $\frac{M}{12b}\cdot 2b=\frac{1}{6}M$；
- 沿中線 $x=0$ 有一根，質量為 $\frac{M}{3b}\cdot 2b=\frac{2}{3}M$。

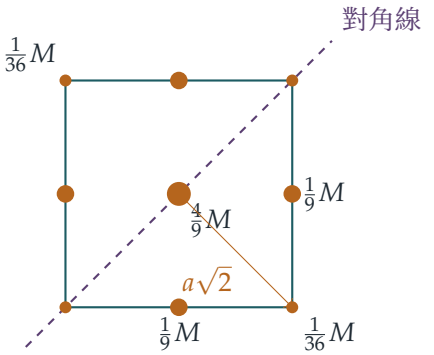
現在以同樣的可加性論證，對這三根桿逐一應用均勻桿的結果：

- 每根邊桿（$\frac{1}{6}M$）變成：在兩端（即長方形的角）各有 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}M=\frac{1}{36}M$，以及在中點（即長度為 $2b$ 的邊的中點）有 $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}M=\frac{1}{9}M$；
- 中央的桿（$\frac{2}{3}M$）變成：在兩端（即長度為 $2a$ 的邊的中點）各有 $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}M=\frac{1}{9}M$，以及在中心有 $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}M=\frac{4}{9}M$。

所以每個角有 $\frac{1}{36}M$，每條邊的中點有 $\frac{1}{9}M$，中心有 $\frac{4}{9}M$。總和為 $\frac{4}{36}M+\frac{4}{9}M+\frac{4}{9}M=M$，而由對稱性可知質心為 O。這就是所求的等效系統。

正方形對其對角線

對於邊長為 $2a$ 的正方形，把四個角放在 $(\pm a,\pm a)$，並取對角線 $y=x$。點 (x_0,y_0) 與這條直線的距離為 $|x_0-y_0|/\sqrt{2}$。



- 角 (a,a)、$(-a,-a)$ 和中心都在對角線上，沒有貢獻。
- 角 $(a,-a)$、$(-a,a)$ 與對角線的距離為 $2a/\sqrt{2}=a\sqrt{2}$。
- 每個中點 $(\pm a,0)$、$(0,\pm a)$ 與對角線的距離為 $a/\sqrt{2}$。

因此

$$I_{\text{對角線}}=2\cdot\tfrac{1}{36}M\cdot 2a^2+4\cdot\tfrac{1}{9}M\cdot\tfrac{1}{2}a^2=\tfrac{1}{9}Ma^2+\tfrac{2}{9}Ma^2=\tfrac{1}{3}Ma^2.$$

非均勻桿

設桿的長度為 $2a$，沿 x 軸由 $x=0$ 伸展至 $x=2a$，線密度（line density）為 kx。那麼

$$m=\int_0^{2a}kx\,\mathrm{d}x=2ka^2,\qquad\text{所以}\qquad k=\frac{m}{2a^2}.$$

它的質心位於

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\int_0^{2a}kx^2\,\mathrm{d}x=\frac{k}{m}\cdot\frac{8a^3}{3}=\frac{4a}{3},$$

並且

$$\int_0^{2a} kx^3\,\mathrm{d}x = \frac{k\,(2a)^4}{4} = 4ka^4 = 2ma^2.$$

與均勻桿的情況一樣，所有點都在同一條直線上，所以對一條通過質心、與桿成角 θ 的軸，轉動慣量為 $\sin^2\theta\sum(\text{質量})(x-\bar{x})^2$。若質量與質心都相同，則 $\sum(\text{質量})(x-\bar{x})^2 = \sum(\text{質量})x^2 - m\bar{x}^2$，所以只需令 $\sum(\text{質量})\,x^2$ 相等便已足夠，而這正是對通過端點 $x=0$ 的垂直軸的轉動慣量。

設質點為：$x=0$ 處的 p_0、$x=a$ 處的 p_1 及 $x=2a$ 處的 p_2。令質量、一階矩（first moment）和二階矩（second moment）分別相等，得出方程

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 + p_2 &= m, \\ p_1 a + 2p_2 a &= \tfrac{4}{3}ma, \\ p_1 a^2 + 4p_2 a^2 &= 2ma^2. \end{aligned}$$

把第三式（除以 a^2）減去第二式（除以 a），得 $2p_2 = \frac{2}{3}m$，所以 $p_2 = \frac{1}{3}m$。於是 $p_1 = \frac{4}{3}m - \frac{2}{3}m = \frac{2}{3}m$，最後 $p_0 = m - \frac{2}{3}m - \frac{1}{3}m = 0$。

位於較輕一端的質點質量為零，所以只需要兩個質點：中點的 $\frac{2}{3}m$ 和較重一端的 $\frac{1}{3}m$。

驗算

- 邊長為 $2a$ 的正方形薄片，對一條通過中心、位於薄片平面內且平行於一邊的軸，其轉動慣量的標準結果是 $\frac{1}{3}Ma^2$。根據垂直軸定理（perpendicular axis theorem）和對稱性，每一條通過中心而位於平面內的軸都給出相同的值，所以對角線也必然如此。結果吻合。
- 對於非均勻桿，兩個質點給出質量 m、一階矩 $\frac{2}{3}m\cdot a + \frac{1}{3}m\cdot 2a = \frac{4}{3}ma$（所以質心位於 $\frac{4}{3}a$）以及二階矩 $\frac{2}{3}ma^2 + \frac{4}{3}ma^2 = 2ma^2$，全部符合要求。
- 在數值上，我們用細密的點質量網格，把每個物體與它的質點系統對空間中 100–200 條隨機的軸（不通過中心）作比較。均勻桿和非均勻桿的誤差小於 10^{-7}，長方形的誤差為 4×10^{-5}（網格誤差），而正方形對其對角線在 $M=a=1$ 時給出 0.33332。

常見錯誤

- 把每條幼條換成它的三個質點，卻沒有說明為甚麼可以這樣做。幼條的中心並不在 O，所以你需要第一部分關於「任何軸」的結果。
- 在最後一部分，只施加質量和質心兩個條件。兩條方程不足以確定三個質量：正是轉動慣量的條件迫使 $p_0 = 0$。

STEP 之外

對於在空間中運動的剛體（rigid body），在動力學上起決定作用的是它的質量、質心和慣性張量（inertia tensor）。慣性張量是一個對稱的 3×3 矩陣，可給出對每一條通過質心的軸的轉動慣量。兩個物體若這三者都相同，在相同的力作用下運動便完全一樣，這就是「動力等效」這個名稱貼切的原因。用幾個點質量去配合一個分佈的頭幾階矩，也是數值積分（numerical integration）背後的想法。均勻桿的權重 $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ 正好就是辛普森法則（Simpson's rule），而若除了權重之外連位置也一併選取，便會引出高斯求積法（Gaussian quadrature）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics* 詳細講述了慣性張量和剛體運動。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。