詳細解答

STEP II 1989，第 12 題

力學 • 剛體平衡

> **STEP II 1989，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q12

關鍵思路

作用在薄片（lamina）上的力只有三個：它的重量和兩根釘子的反作用力（reaction）。光滑的釘子只會沿垂直於所接觸的邊的方向施力，而在長方形中，這就表示每個反作用力都平行於另一條邊。一個物體若在三個互不平行的力作用下保持平衡（equilibrium），這三個力的作用線（line of action）必須交於一點。因此，兩個反作用力的交點必定位於通過中心的鉛垂線上。兩個結果都可由這一事實，加上兩根釘子等高這個條件推導出來。

解答

建立模型

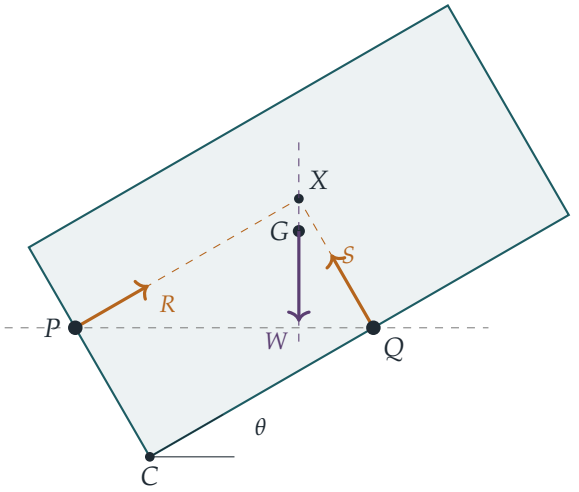
我們把薄片看成一個重量為 W、中心為 G 的均勻剛性長方形，並把兩根釘子看成位於同一高度的光滑點 P 和 Q。設 C 為最低的頂點。通過 C 而長度為 $2a$ 的邊擱在 P 上，其中 $CP = p$；通過 C 而長度為 $2b$ 的邊擱在 Q 上，其中 $CQ = q$。$2b$ 邊與水平線成銳角 θ，所以（與它垂直的）$2a$ 邊與鉛垂線成角 θ。

最方便的做法是沿兩條邊設立坐標：由 C 出發，沿 $2b$ 邊量度 u，沿 $2a$ 邊量度 v。於是

$$C = (0,0), \qquad P = (0,p), \qquad Q = (q,0), \qquad G = (b,a).$$

點 (u,v) 相對於 C 的水平位移和鉛垂位移為

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta, \qquad y = u\sin\theta + v\cos\theta.$$



兩個反作用力交於通過 G 的鉛垂線上

P 處的反作用力 R 垂直於 $2a$ 邊，所以它平行於 $2b$ 邊：它的作用線是 $v = p$。同理，Q 處的反作用力 S 沿 $u = q$ 作用。這兩條直線交於 $X = (q, p)$，即長方形 $CPXQ$ 的第四個頂點。

對 X 取力矩（moment），兩個反作用力的力矩均為零，所以重量的力矩也必須為零：通過 G 的鉛垂線通過 X。換句話說，X 和 G 的水平坐標相同：

$$q\cos\theta - p\sin\theta = b\cos\theta - a\sin\theta, \qquad \text{即} \qquad (q-b)\cos\theta = (p-a)\sin\theta. \qquad (1)$$

（分解各力可得 $R = W\sin\theta$ 和 $S = W\cos\theta$，兩者皆為正數，所以釘子確實能夠提供這些力。）

第一個結果

由於 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，$\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 都是正數，所以由 (1) 可知 $q-b$ 與 $p-a$ 同號。若 $p < a$，則 (1) 的右邊為負數，所以 $q - b < 0$，即 $q < b$。這正是所求的結果：若該頂點與 $2a$ 邊上的釘子相距少於 a，則它與另一根釘子相距少於 b。

? **想一想** 為甚麼問題還未完結？d 在哪裏出現？

方程 (1) 只用到力矩條件。它還未涉及 d，而且 p 和 q 並非互相獨立：兩根釘子等高，並且相距 d。現在我們把這兩個事實用上。

與 d 的關係

兩根釘子位於同一高度，所以 P 和 Q 的 y 坐標相等：

$$p\cos\theta = q\sin\theta, \qquad \text{所以} \qquad p = q\tan\theta. \tag{2}$$

它們的水平距離為 d：

$$d = x_Q - x_P = q\cos\theta + p\sin\theta = q\cos\theta + \frac{q\sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{q}{\cos\theta}. \tag{3}$$

（等價地說，三角形 CPQ 以 C 為直角，斜邊（hypotenuse）$PQ = d$ 是水平的，所以 $q = d\cos\theta$ 及 $p = d\sin\theta$。）

現在把 $q = d\cos\theta$ 和 $p = d\sin\theta$ 代入 (1) 的第一個形式的左邊：

$$\begin{aligned} b\cos\theta - a\sin\theta &= q\cos\theta - p\sin\theta \\ &= d\cos^2\theta - d\sin^2\theta \\ &= d\cos 2\theta, \end{aligned}$$

這就是所求的結果。

驗算

- 正方形的情況 $a = b$、$\theta = \frac{\pi}{4}$：兩邊都等於零。根據對稱性，對角線 CG 是鉛垂的，所以結果吻合；而且這對任何 d 都成立，正方形對稱地放置時理應如此。
- 取 $a = 1$、$b = 2$、$\theta = \frac{\pi}{6}$，平衡時需要 $q = d\cos\theta$ 及 $d = (b\cos\theta - a\sin\theta)/\cos 2\theta \approx 2.4641$。由此得 $p \approx 1.2321 > a$ 及 $q \approx 2.1340 > b$，與 (1) 吻合。以 $R = W\sin\theta$ 和 $S = W\cos\theta$ 對 G 取力矩，結果為零。
- 數值上，超過 10^5 個隨機的平衡位置（隨機選取 a、b、θ，而釘子落在邊上）全部滿足該恆等式，誤差在 10^{-14} 以內，而且從不違反「$p < a \Rightarrow q < b$」。

常見錯誤

- 把釘子的反作用力當作鉛垂。光滑接觸的施力方向垂直於接觸面（這裏是薄片的邊），而不是垂直於地面。
- 混淆了哪一條邊與水平線成角 θ：$2a$ 邊是與鉛垂線成角 θ。

STEP 之外

三力原理是剛體（rigid body）靜力學一般理論的特殊情況：一個力系處於平衡，當且僅當它的合力以及它對任意一點的合力矩同時為零。到了大學，這會發展成力螺旋（wrench）和虛功（virtual work）的語言。若用虛功的方法，可以在薄片與兩根釘子保持接觸的約束下，把 G 的高度減至最小，從而求出這個平衡位置。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對剛體靜力學和力矩（torque）有嚴謹的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。