詳細解答

STEP II 1989，第 11 題

力學 • 連接質點與衝量

> **STEP II 1989，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q11

關鍵思路

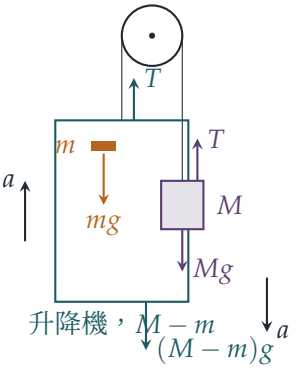
升降機與平衡錘一開始互相平衡，所以升降機的質量 M 必定已包括瓷磚在內。瓷磚一旦脫落，升降機便比平衡錘輕，於是向上加速，而瓷磚則自由下墜，地板因而升上來迎向瓷磚。處理碰撞時，把升降機、纜索和平衡錘視為沿纜索運動的單一系統。這個系統的「沿纜索的動量」只會因重力而改變，而碰撞產生的衝量（impulse）則屬於系統的內力。

解答

建立模型

我們把升降機、平衡錘和瓷磚都當作質點（particle），並假設纜索輕而不可伸長（light and inextensible），繞過一個光滑而輕的滑輪（pulley）。導軌是光滑的，所以不會施加任何垂直方向的力。瓷磚掉下之前，系統處於靜止狀態，兩邊的質量分別為 M 和 M。因此升降機的質量 M 已包括瓷磚。（否則升降機一邊的重量是 $(M+m)g$，另一邊只有 Mg，系統不可能靜止。）

瓷磚脫落之後，升降機的質量為 $M-m$，平衡錘的質量為 M，而瓷磚是一個自由質點。



到達地板所需的時間

設升降機以加速度 a 向上加速，則平衡錘以加速度 a 向下加速。設 T 為纜索的張力（tension）。由牛頓第二定律（Newton's second law）可得

$$\begin{aligned} &\text{升降機（向上）：} && T-(M-m)g=(M-m)a,\\ &\text{平衡錘（向下）：} && Mg-T=Ma. \end{aligned}$$

把兩式相加便可消去 T：

$$a=\frac{mg}{2M-m},\qquad T=M(g-a)=\frac{2M(M-m)g}{2M-m}>0,$$

所以纜索一直保持拉緊。

? **想一想** 為甚麼不能直接說瓷磚在重力作用下墜落了距離 h？

因為地板也在移動。瓷磚以 g 向下加速，地板以 a 向上加速，兩者都由靜止開始。因此兩者之間的距離以恆定的相對加速度（relative acceleration）收窄：

$$g+a=g+\frac{mg}{2M-m}=\frac{2Mg}{2M-m}.$$

這段距離最初是 h，所以瓷磚在 $\frac{1}{2}(g+a)t^2=h$ 時着地，由此可得

$$t^2=\frac{2h}{g+a}=\frac{(2M-m)h}{Mg},\qquad t=\sqrt{\frac{(2M-m)h}{Mg}}.$$

這並不是題目所印的式子，題目中出現的是 $2(M-m)$ 而不是 $2M-m$。兩者只在 $m=0$ 時才一致，而我們的結果會在下文以數值方法逐步模擬運動來驗證。題目所印的式子，需要升降機以 $mg/(M-m)$ 加速才會成立。如果忘記了平衡錘也要被加速，並把張力當作維持在 Mg，就會得到這個結果。我們相信題目所印的公式是原題的誤植或疏忽。題目其餘部分完全不依賴這個式子。

碰撞

在撞擊前的一刻，升降機向上運動，平衡錘向下運動，兩者的速率都是 $u = at$。瓷磚則以速率 $v = gt$ 向下運動。於是

$$(2M - m)u = (2M - m) \cdot \frac{mg}{2M - m}\, t = mgt = mv.$$

現在考慮碰撞本身。取「正方向」為升降機向上／平衡錘向下，即纜索帶動兩者一起運動的方向。撞擊歷時極短，所以有限的力（各物體的重量）所產生的衝量可以忽略。僅有的衝量是瓷磚與地板之間的衝量（它是「升降機連瓷磚」這個整體的內力），以及纜索中的衝擊張力（impulsive tension）J。設 w 為碰撞後的共同速率（升降機連瓷磚，質量為 M，向上；平衡錘向下）。碰撞是完全非彈性的（perfectly inelastic），所以瓷磚最終隨地板一起運動。於是

$$\begin{aligned} \text{升降機連瓷磚：} \quad & Mw - [(M - m)u - mv] = J, \\ \text{平衡錘：} \quad & Mw - Mu = -J. \end{aligned}$$

把兩式相加，

$$2Mw = (M - m)u + Mu - mv = (2M - m)u - mv = 0,$$

所以 $w = 0$：升降機停了下來。（另外 $J = Mu > 0$，所以纜索確實是被猛然拉緊而不是變鬆，這與我們的假設一致。）撞擊之後，兩邊的質量再次是 M 和 M，互相平衡，所以一切保持靜止。

> ? **想一想** 為甚麼在撞擊前的一刻，總的「沿纜索的動量」是零？

撞擊之前，作用在這三個物體上而又沿運動方向的外力只有重力，按上面所定的正方向計算，其淨效果為 $Mg - (M - m)g - mg = 0$。（滑輪的反作用力不作功，而纜索屬於系統內部。）所以這個動量自始至終保持在初始值 0。碰撞同樣不能改變它。

能量損失

系統由靜止開始，最後也歸於靜止，所以損失的機械能（mechanical energy）等於開始與結束之間重力勢能（gravitational potential energy）的減少量。在墜落期間，設升降機上升了 s_1（因此平衡錘下降了 s_1），並設瓷磚下降了 s_2。瓷磚走完了原來相距的 h，所以 $s_1 + s_2 = h$。勢能的變化為

$$(M - m)g\, s_1 - Mg\, s_1 - mg\, s_2 = -mg(s_1 + s_2) = -mgh.$$

碰撞之後再沒有任何東西移動，所以損失的能量是 mgh，正如題目所求。撞擊前一刻所有的動能（kinetic energy）都在碰撞中消失。留意這個論證完全沒有用到 t 的值。

驗算

- 若 $m \to 0$，則 $a \to 0$ 且 $t \to \sqrt{2h/g}$，即自由落體落在靜止的地板上。兩條公式都通過這個測試，所以它無法分辨兩者。
- 取 $M = 5$、$m = 1$、$h = 1$ 及 $g = 9.8$，以數值方法逐步模擬運動，得 $t \approx 0.4286\,\mathrm{s}$，與 $\sqrt{9/49} \approx 0.4286$ 吻合。題目所印的公式則給出 $\sqrt{8/49} \approx 0.404\,\mathrm{s}$。
- 在同一個模擬中，撞擊前一刻的動能等於 mgh，準確至五位有效數字，而碰撞後的速率為零，誤差只在捨入範圍之內。

常見錯誤

- 把升降機的質量當作 M 另加瓷磚：這樣系統一開始就不可能靜止。
- 忘記了平衡錘的慣性（inertia），以致算出升降機的加速度為 $mg/(M-m)$。
- 在碰撞中只對升降機和瓷磚使用線動量守恆（conservation of linear momentum），忽略了纜索中的衝擊張力。

STEP 之外

這裏所用的「沿纜索的動量」是一種*廣義動量*（generalised momentum）：對於只有一個自由度（degree of freedom）的系統，其坐標就是已繞過滑輪的纜索長度。拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）把這套做法系統化。凡是力在其上沒有淨效果的坐標，都對應一個守恆的廣義動量，而衝擊約束（impulsive constraint）也可用同樣的方法處理。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）仔細討論了以繩和滑輪連接的系統，以及碰撞中的衝量和能量。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。