詳細解答

STEP II 1989，第 10 題

純數學 • 直線與平面

> **STEP II 1989，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q10

關鍵思路

空間中的兩條直線不交於唯一一點，有三種情況：兩者是同一條直線；兩者平行；或者兩者是*異面直線*（skew lines），分處不同平面而互不相遇。因此「恰好交於一點」需要兩個條件：兩個方向不平行，而且兩條直線位於同一平面上。向量積（cross product）可以同時處理這兩個條件。至於那兩個平面，其交線的方向就是兩個法向量（normal）的向量積，而最後一部分其實只是第一部分換了個樣子再出現一次。

解答

第一部分：兩條直線何時恰好交於一點

兩條直線相交之處滿足 $\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}=\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}$，即

$$\lambda\mathbf{u}-\mu\mathbf{v}=\mathbf{b}-\mathbf{a}.$$

要它們是真正的直線，需要 $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$。於是：

- 若 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 平行（$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$），兩條直線要麼平行而相異（沒有公共點），要麼完全重合（有無限多個公共點）。無論哪一種，都不是恰好一點。
- 若 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$，則 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 張成（span）一個平面，而方程有解當且僅當 $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ 位於該平面上，即與 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 垂直。解若存在則必唯一，因為 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 線性無關（independent）。

所以條件是

$$\mathbf{u}\neq\mathbf{0},\quad \mathbf{v}\neq\mathbf{0},\quad \mathbf{u}\times\mathbf{v}\neq\mathbf{0},\quad (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0.$$

（頭兩個條件已由第三個推出，但仍值得寫明。）若最後一個條件不成立，兩條直線便是

異面直線。

第二部分：兩個平面

兩個法向量是 $\mathbf{n}_1 = (1,1,b)$ 和 $\mathbf{n}_2 = (b,b,1)$，而

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \big(1-b^2,\ b^2-1,\ 0\big) = (1-b^2)(1,-1,0).$$

兩個平面不交於一條直線，當且僅當它們的法向量平行；在這裏即 $1-b^2 = 0$，所以 $b = 1$ 或 $b = -1$。

- $b = 1$：兩條方程都變成 $x+y+z = 3$。
- $b = -1$：兩條方程是 $x+y-z = 1$ 和 $-x-y+z = -1$，同樣是同一個平面。

所以在這兩種情況下，兩個平面都是重合，而不是平行而分開。

現在取 $b \neq \pm 1$。交線沿 $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ 的方向，所以可以取 $\mathbf{u} = (1,-1,0)$。要找出線上的點，留意 x 和 y 只以 $s = x+y$ 的形式出現：

$$s + bz = b+2, \qquad bs + z = 2b+1.$$

從第二式減去第一式的 b 倍，得 $(1-b^2)z = 1-b^2$，所以 $z = 1$（由於 $b^2 \neq 1$，可以相除），繼而 $s = 2$。因此交線是 $x+y = 2$，$z = 1$，與 b 無關。

我們需要在這條直線上找一點 $\mathbf{a}$ 使得 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = 0$，即 $x-y = 0$。連同 $x+y = 2$，得 $x = y = 1$，所以

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \qquad b \neq \pm 1.$$

點 $\mathbf{a}$ 就是由原點到這條直線的垂足。

最後部分

坐標同時滿足兩條方程 $(*)$ 的點，當 $b \neq \pm 1$ 時組成上述直線，當 $b = \pm 1$ 時則組成整個平面。我們把這兩種情況分開處理。

> ? **想一想** 當 $b = \pm 1$ 時，同時滿足兩條方程的點組成甚麼集合？

是整個平面，而不是空集，因為我們已發現兩個平面重合。在這些情況下，答案因此完全不同。

情況 $b \neq \pm 1$。我們需要題目所給的直線與直線 $\mathbf{r} = (1,1,1) + \lambda(1,-1,0)$ 恰好交於一點。應用第一部分，取 $\mathbf{a} = (1,1,1)$，$\mathbf{u} = (1,-1,0)$，$\mathbf{b} = (0,0,c)$，$\mathbf{v} = (1,d,0)$。於是

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (0,\,0,\,d+1), \qquad (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (-1,-1,c-1)\cdot(0,0,d+1) = (c-1)(d+1).$$

我們需要 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$，所以 $d\neq -1$，於是 $(c-1)(d+1)=0$ 迫使 $c=1$。所以條件是 $c=1$ 和 $d\neq -1$。（直接驗證：題目所給的直線上 $z=c$，所以只有當 $c=1$ 時它才與 $z=1$ 相遇，而此時 $x+y=\mu(1+d)=2$ 在 $d\neq -1$ 時有唯一解 $\mu=2/(1+d)$。）

情況 $b=\pm 1$。現在我們需要題目所給的直線與一個平面恰好交於一點。點 $(\mu,d\mu,c)$ 位於 $x+y+z=3$ 上（對應 $b=1$）當 $\mu(1+d)=3-c$，位於 $x+y-z=1$ 上（對應 $b=-1$）當 $\mu(1+d)=1+c$。每條方程對 μ 恰有一個解，當且僅當 $1+d\neq 0$；若 $d=-1$，直線與平面平行，方程或無解，或有無限多個解。這裏 c 可取任何值。

答案。恰有一個這樣的點，當且僅當

$$d\neq -1 \quad \text{及} \quad \big(c=1 \text{ 或 } b=\pm 1\big),$$

可以簡潔地寫成 $d\neq -1$ 及 $(b^2-1)(c-1)=0$。

驗算

- 把 $(1+\lambda,1-\lambda,1)$ 代入 $(*)$：$2+b=b+2$ 及 $2b+1=2b+1$，對所有 b 和 λ 都成立。
- 取 $b=2$，$c=1$，$d=3$，交點對應 $\mu=\frac{1}{2}$，即 $(\frac{1}{2},\frac{3}{2},1)$：$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+2=4=b+2$ 及 $1+3+1=5=2b+1$。
- 用電腦以精確算術測試了 $\{-3,\ldots,3,\frac{1}{2},-\frac{5}{3}\}$ 中所有的 b,c,d（共 729 個情況），直接求解 μ，結果解的數目為一，恰好就是上述條件成立之時。

常見錯誤

- 只因兩條直線不平行，就說它們交於一點。在三維空間中，它們可以是異面直線。
- 以為當 $b=\pm 1$ 時兩個平面平行而分開，從而斷定完全沒有這樣的點。檢查一下右邊的常數：兩個平面是重合的。
- 除以 $1-b^2$ 而沒有說明它為何不等於零。

STEP 之外

這其實是一個小型的線性方程組（system of linear equations），只是換了個樣子：三個未知數的兩條方程，當係數矩陣的秩（rank）為 2 時，解組成一條直線；當秩為 1 時，解組成一個平面（或者無解）。加入直線的參數式後，它就變成一個關於 μ 的超定方程組（overdetermined system），而「恰有一個解」就是一個關於秩與相容性（consistency）的

命題。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）正是由這裏出現的行圖像（平面相交）和列圖像（向量的組合）出發，建立起這一切。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。