詳細解答

STEP II 1989，第 1 題

純數學 • 三次方程的三角解法

> **STEP II 1989，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q1

關鍵思路

這條恆等式（identity）說明，當 $z = \cos\theta$ 時，$4z^3 - 3z$ 其實就是喬裝了的 $\cos 3\theta$。因此，只要能把三次方程（cubic）化成 $4z^3 - 3z = k$ 的形式，而且 $|k| \leq 1$，解這條方程就等同於解 $\cos 3\theta = k$，而後者有三個容易求得的解。兩個代換（substitution）各司其職：平移 $y = x + a$ 用來消去平方項，縮放 $z = by$ 則把餘下兩個係數（coefficient）之比調整為 $4 : 3$。

解答

恆等式

利用複角公式（addition formulae）及 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$，

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,\end{aligned}$$

正是所求。

化簡三次方程

設 $y = x + a$，則 $x = y - a$，而 $24(y-a)^3 - 72(y-a)^2 + \cdots$ 中 y^2 的係數是 $-72a - 72$。要消去這一項，須取 $a = -1$，即 $x = y + 1$。於是

$$\begin{aligned} &24(y+1)^3 - 72(y+1)^2 + 66(y+1) - 19 \\ &\quad = (24y^3 + 72y^2 + 72y + 24) - (72y^2 + 144y + 72) \\ &\qquad + (66y + 66) - 19 \\ &\qquad\qquad = 24y^3 - 6y - 1, \end{aligned}$$

所以 $(*)$ 變成

$$24y^3 - 6y = 1.$$

現在代入 $y = z/b$：

$$\frac{24}{b^3}z^3 - \frac{6}{b}z = 1.$$

> **想一想** 應該怎樣選取 b，才能令左方成為 $4z^3 - 3z$ 的倍數？

我們需要 z^3 與 z 的係數之比為 $4 : -3$，所以

$$\frac{24/b^3}{6/b} = \frac{4}{3} \quad\Longrightarrow\quad \frac{4}{b^2} = \frac{4}{3} \quad\Longrightarrow\quad b^2 = 3.$$

取 $b = \sqrt{3}$。這時方程是 $\dfrac{8}{\sqrt{3}}z^3 - \dfrac{6}{\sqrt{3}}z = 1$，兩邊乘以 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，得

$$4z^3 - 3z = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以 $a = -1$、$b = \sqrt{3}$ 及 $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$，其中 $z = \sqrt{3}\,(x-1)$。（若改取 $b = -\sqrt{3}$，則 $k = -\frac{\sqrt{3}}{2}$，最後得到的根（root）完全相同。）

求根

由於 $|k| \le 1$，我們可以寫 $z = \cos\theta$，而根據恆等式，方程變成

$$\cos 3\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ.$$

所以 $3\theta = 30^\circ,\ 390^\circ,\ 750^\circ$，從而 $\theta = 10^\circ,\ 130^\circ,\ 250^\circ$。這三個角給出三個不同的 $\cos\theta$ 值，而三次方程最多只有三個根，所以這就是全部的根：

$$z = \cos 10^\circ,\quad \cos 130^\circ,\quad \cos 250^\circ.$$

把代換還原，$x = 1 + \dfrac{z}{\sqrt{3}}$，所以

$$x_1 = 1 + \frac{\cos 10^\circ}{\sqrt{3}} = 1.5686\ldots \approx 1.57,$$
$$x_2 = 1 + \frac{\cos 130^\circ}{\sqrt{3}} = 0.6289\ldots \approx 0.629,$$
$$x_3 = 1 + \frac{\cos 250^\circ}{\sqrt{3}} = 0.8025\ldots \approx 0.803.$$

並非每條三次方程都適用

對於一般的首一（monic）三次方程 $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$，平移的選擇別無他法：代入 $x = y - a$ 後，y^2 的係數是 $\alpha - 3a$，所以 $a = \frac{\alpha}{3}$，由此得到 $y^3 + py + q = 0$，其中 $p = \beta - \frac{\alpha^2}{3}$。代入 $y = z/b$ 並乘以 $4b^3$，得

$$4z^3 + 4pb^2 z + 4qb^3 = 0,$$

要與 $4z^3 - 3z$ 吻合，須有 $4pb^2 = -3$，即 $b^2 = -\dfrac{3}{4p}$。只有當 $p < 0$ 時，這才有實數解。

一個反例（counterexample）是

$$x^3 + 3x - 4 = 0.$$

這裏 $\alpha = 0$，所以 $a = 0$ 而 $p = 3 > 0$；我們需要 $b^2 = -\frac{1}{4}$，但沒有實數 b 能滿足這個條件。所以這條方程根本無法化成 $4z^3 - 3z = k$ 的形式。（方程本身確實有根：它可分解為 $(x-1)(x^2 + x + 4) = 0$，而當中二次式的判別式（discriminant）為 $-15 < 0$，所以 $x = 1$ 是它唯一的實根。失效的是這個方法，而不是方程。）

即使 $p < 0$，這個方法也可能在下一步失效。對於 $x^3 - 3x - 4 = 0$，代換 $x = 2z$ 給出 $4z^3 - 3z = 2$；但 $|\cos 3\theta| \le 1$，所以沒有實數 θ 能使 $\cos 3\theta = 2$。

驗算

- 三個根之和應為 $\frac{72}{24} = 3$，三個根之積應為 $\frac{19}{24}$。事實上，各 cos 項之和為零（$\cos 10^\circ + \cos 130^\circ + \cos 250^\circ = 0$），而數值上 $1.5686 \times 0.6289 \times 0.8025 = 0.7917 \approx \frac{19}{24}$。
- 把 $x = 1.5686$ 代入 $24x^3 - 72x^2 + 66x - 19$，在計算機的準確度之內結果為零；其餘兩個根亦然。

常見錯誤

- 求得 $\theta = 10^\circ$ 便停下來：另外兩個根來自 $3\theta = 390^\circ$ 和 750°。

- 弄錯 a 的正負號：$y = x + a$ 而 $x = y + 1$，即 $a = -1$，不是 $+1$。
- 舉反例時，選了一條 $p < 0$ 而且 $|k| \leq 1$ 的三次方程，但這個方法其實完全應付得來。在斷言方法失效之前，先檢查 $b^2 > 0$ 和 $|k| \leq 1$ 這兩個條件。

STEP 之外

這個方法恰好在三次方程有三個實根時適用，這正是所謂「不可約情形」（casus irreducibilis）：儘管每個答案都是實數，卡爾達諾（Cardano）公式卻迫使你繞道複數的立方根。當 $|k| > 1$ 時，把 cos 換成 cosh，同樣的想法依然可行，因為 $\cosh 3u = 4\cosh^3 u - 3\cosh u$；對於 $x^3 - 3x - 4 = 0$，這給出實根 $x = 2\cosh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arcosh} 2\right) \approx 2.196$。至於哪些多項式方程可以用根式求解（solved by radicals）這個更深入的問題，則通往伽羅瓦理論（Galois theory）；Allenby 的 *Rings, Fields and Groups* 是很好的入門讀物，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis* 則展示了立方根的幾何。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。