詳細解答

STEP I 1989，第 9 題

純數學 • 圖像的變換

> **STEP I 1989，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q9

關鍵思路

只要畫出基本的三次曲線（cubic），其餘每一個圖像都只是同一條曲線經坐標變換後的樣子。代換（substitution）$X = ax + b$, $Y = cy + d$ 不過是在每個方向上先作伸縮（stretch）（或反射（reflection）），再作平移（translation），而且它會把轉向點（turning point）變到轉向點。因此，全部工夫就在於找出原來三次曲線的兩個轉向點，並追蹤它們去了哪裏。

解答

基本圖像

寫成 $y = \frac{1}{8}(x^3 - 12x) = \frac{1}{8}x(x^2 - 12)$。於是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3x^2 - 12}{8} = \frac{3(x-2)(x+2)}{8}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{6x}{8} = \frac{3x}{4}.$$

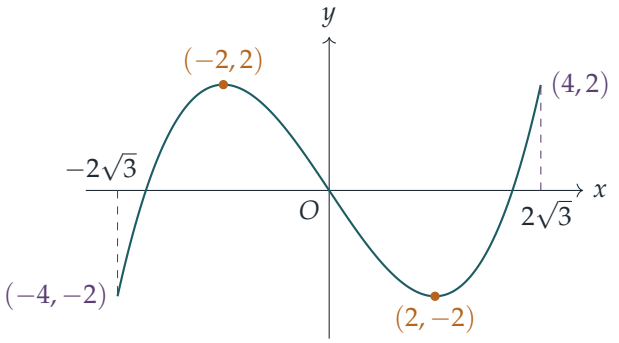
斜率（gradient）在 $x = \pm 2$ 處為零。

- 在 $x = -2$：$y = \frac{1}{8}(-8 + 24) = 2$，而 $y'' = -\frac{3}{2} < 0$，所以 $(-2, 2)$ 是局部極大點（local maximum）。
- 在 $x = 2$：$y = \frac{1}{8}(8 - 24) = -2$，而 $y'' = \frac{3}{2} > 0$，所以 $(2, -2)$ 是局部極小點（local minimum）。

其他有用的特徵：

- 曲線與坐標軸相交於 $x(x^2 - 12) = 0$ 之處，即 $x = 0$ 及 $x = \pm 2\sqrt{3} \approx \pm 3.46$。

- 這個函數是奇函數（odd function），所以圖像繞原點有 2 階旋轉對稱（rotational symmetry），而原點亦是拐點（point of inflection）；該處的斜率為 $-\frac{3}{2}$。
- 在兩端，$y(4) = \frac{1}{8}(64 - 48) = 2$ 及 $y(-4) = -2$。所以曲線恰好在 $x = 4$ 處回升到極大點的高度。



為何轉向點會變到轉向點

想一想 當我們變換坐標時，怎樣知道新的轉向點就是舊轉向點的像？

若 $X = ax + b$ 及 $Y = cy + d$，其中 $a, c \neq 0$，則由鏈式法則（chain rule）可得

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X/\mathrm{d}x} = \frac{c}{a}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

它恰好在 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 為零之處為零。所以新的轉向點就是 $(-2, 2)$ 和 $(2, -2)$ 的像。（若 $c/a < 0$，圖形會被反射，極大點與極小點的角色互換。）從幾何上看：

- $X = \frac{1}{2}x$ 把圖像沿水平方向壓縮，壓縮因子為 2；
- $Y = \frac{1}{2}y$ 把圖像沿垂直方向壓縮，壓縮因子為 2；
- 再把 1 加到 X 或 Y 上，則把圖像向右或向上平移 1 個單位。

四個變換後的圖像

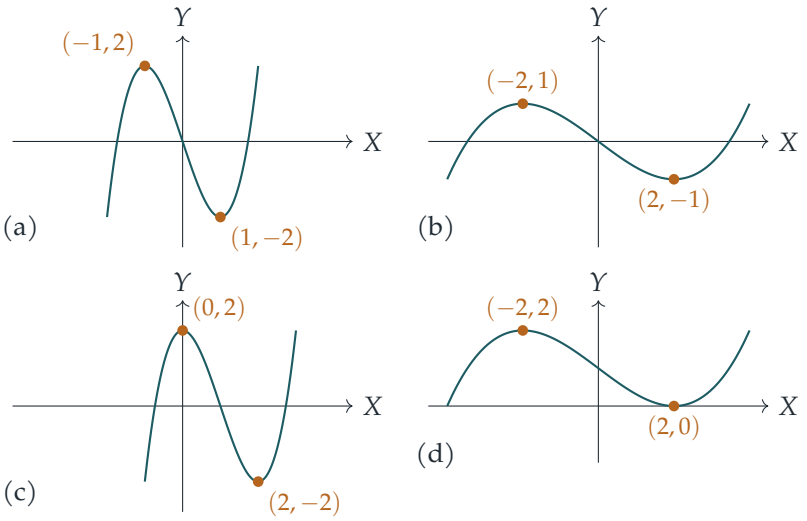
把每個映射分別應用於 $(-2, 2)$、$(2, -2)$ 以及範圍 $-4 \leq x \leq 4$：

(a) $X = \frac{1}{2}x$, $Y = y$：極大點 $(-1, 2)$，極小點 $(1, -2)$，範圍為 $-2 \leq X \leq 2$。曲線是 $Y = X^3 - 3X$。

(b) $X = x$, $Y = \frac{1}{2}y$：極大點 $(-2, 1)$，極小點 $(2, -1)$，範圍為 $-4 \leq X \leq 4$。曲線是 $16Y = X^3 - 12X$。

(c) $X = \frac{1}{2}x + 1, Y = y$：極大點 $(0,2)$，極小點 $(2,-2)$，範圍為 $-1 \le X \le 3$。這是把圖像 (a) 向右移 1 個單位，拐點在 $(1,0)$。

(d) $X = x, Y = \frac{1}{2}y + 1$：極大點 $(-2,2)$，極小點 $(2,0)$，範圍為 $-4 \le X \le 4$。這是把圖像 (b) 向上移 1 個單位，拐點在 $(0,1)$；它在極小點處與 X 軸相切。



最後部分

我們需要 $a, c \neq 0$（否則圖像會塌縮成一條直線），這樣新圖像的轉向點就是

$$(-2a + b,\ 2c + d) \quad 及 \quad (2a + b,\ -2c + d).$$

這兩點必須是 $(0,0)$ 和 $(1,1)$，次序不拘，由此得到兩組線性方程組。

情況 1：$(-2,2) \mapsto (0,0)$ 及 $(2,-2) \mapsto (1,1)$。於是 $-2a + b = 0$ 及 $2a + b = 1$，所以 $b = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{4}$；又 $2c + d = 0, -2c + d = 1$，所以 $d = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{4}$。

情況 2：$(-2,2) \mapsto (1,1)$ 及 $(2,-2) \mapsto (0,0)$。同理可得 $a = -\frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}, d = \frac{1}{2}$。

所以其中一個答案是

$$a = \tfrac{1}{4}, \quad b = \tfrac{1}{2}, \quad c = -\tfrac{1}{4}, \quad d = \tfrac{1}{2},$$

另一個答案是 $a = -\frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}, d = \frac{1}{2}$。

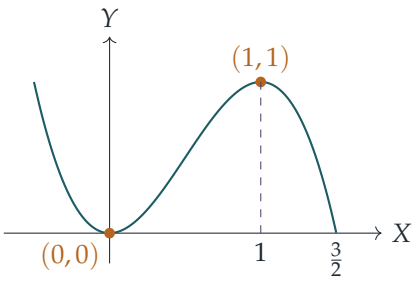
新曲線的方程值得求出來。在情況 1 中，$x = 4X - 2$ 及 $y = 2 - 4Y$，所以

$$\begin{aligned} 8(2 - 4Y) &= (4X - 2)^3 - 12(4X - 2) \\ &= 64X^3 - 96X^2 + 48X - 8 - 48X + 24 \\ &= 64X^3 - 96X^2 + 16, \end{aligned}$$

化簡後得

$$Y = 3X^2 - 2X^3 = X^2(3 - 2X).$$

這條曲線有 $Y' = 6X(1 - X)$，所以它的轉向點確實是位於 $(0,0)$ 的極小點和位於 $(1,1)$ 的極大點。情況 2 給出完全相同的曲線：由於這個三次函數是奇函數，把 (x,y) 換成 $(-x,-y)$ 並不會改變原來的圖像，而這正是兩種情況之間唯一的分別。



當 $-4 \le x \le 4$ 時，這條曲線由 $(-\frac{1}{2}, 1)$ 延伸至 $(\frac{3}{2}, 0)$。

驗算

- 把 $X = 0$ 和 $X = 1$ 代入 $Y = 3X^2 - 2X^3$，分別得 0 和 1，而 $Y' = 6X(1 - X)$ 在這兩處都等於零。
- 每個變換後的圖像都保留了原圖像的一個特徵：曲線在範圍的一端回到某個轉向點的高度。例如在 (d) 中，$Y = 2$ 於 $X = 4$，而 $Y = 0$ 於 $X = -4$。
- 數值上，在 $x = 1$ 處我們有 $y = -\frac{11}{8}$；在情況 1 中這給出 $X = 0.75, Y = 0.84375$，而 $3(0.75)^2 - 2(0.75)^3 = 0.84375$。

常見錯誤

- 弄錯伸縮的方向：$X = \frac{1}{2}x$ 令圖像變窄，而不是變闊，因為位於 $x = 2$ 的點會移到 $X = 1$。
- 忘記把定義域（domain）也一併變換：圖像 (c) 的範圍是 $-1 \le X \le 3$，而不是 $-4 \le X \le 4$。
- 最後部分只給出一個解，而沒有留意到轉向點還有另一種對應次序（給出任何一個已經足夠，但第一種情況中的 $c < 0$ 很容易被忽略）。

STEP 之外

映射 $X = ax + b, Y = cy + d$ 是仿射變換（affine transformation），而最後部分說明，任何有兩個轉向點的三次曲線，都可以用其中一個這樣的變換移到標準曲線 $Y = 3X^2 - 2X^3$ 上；這就是電腦圖像學中所用的「smoothstep」函數。像這樣按某個變換羣（group of transformations）來為曲線分類，是貫穿幾何與線性代數（linear algebra）的一個主題。至於這個故事中與矩陣有關的一面，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。