詳細解答

STEP I 1989，第 8 題

純數學 • 倍角公式

> **STEP I 1989，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q8

關鍵思路

棣莫弗定理（De Moivre's theorem）把 $\cos n\theta$ 化為 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$ 的實部（real part），再把 $\sin^2\theta$ 換成 $1-\cos^2\theta$，便得到一個以 $\cos\theta$ 為變量的多項式（polynomial）。至於最後一部分，那個六次多項式（sextic）看來像是剛求得的兩個多項式的某種組合，於是我們着手找出這個組合：原來它正是 $\cos 6\theta - \cos 4\theta$ 的一半，而解 $\cos 6\theta = \cos 4\theta$ 十分容易。

解答

以下一律記 $c = \cos\theta$ 及 $s = \sin\theta$，故 $s^2 = 1 - c^2$。

第 (i) 部分

由棣莫弗定理，$\cos 4\theta + \mathrm{i}\sin 4\theta = (c + \mathrm{i}s)^4$。以二項式定理（binomial theorem）展開，並只保留實數項（即 $\mathrm{i}s$ 的冪次為偶數的各項），

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= c^4 - \tbinom{4}{2}c^2s^2 + s^4 \\ &= c^4 - 6c^2(1-c^2) + (1-c^2)^2 \\ &= c^4 - 6c^2 + 6c^4 + 1 - 2c^2 + c^4 \\ &= 8c^4 - 8c^2 + 1,\end{aligned}$$

這正是所求的恆等式（identity）。

第 (ii) 部分

同樣地，取 $(c+\mathrm{i}s)^6$ 的實部，得

$$\cos 6\theta = c^6 - 15c^4s^2 + 15c^2s^4 - s^6,$$

其中用到 $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$ 以及 $\mathrm{i}^2 = -1$、$\mathrm{i}^4 = 1$、$\mathrm{i}^6 = -1$。設 $u = c^2$，則 $s^2 = 1-u$：

$$\begin{aligned}\cos 6\theta &= u^3 - 15u^2(1-u) + 15u(1-u)^2 - (1-u)^3 \\ &= u^3 - 15u^2 + 15u^3 + 15u - 30u^2 + 15u^3 - 1 + 3u - 3u^2 + u^3 \\ &= 32u^3 - 48u^2 + 18u - 1 \\ &= 32c^6 - 48c^4 + 18c^2 - 1,\end{aligned}$$

證畢。

方程

把左方記為 $p(x) = 16x^6 - 28x^4 + 13x^2 - 1$。

> **想一想** 這個多項式並不是那兩個恆等式中的任何一個，它們又怎能派上用場？

比較係數（coefficient）。首項係數 16 是 32 的一半，常數項 -1 是 -2 的一半，這提示我們把 (ii) 減去 (i)：

$$\cos 6\theta - \cos 4\theta = 32c^6 - 56c^4 + 26c^2 - 2 = 2\,p(c).$$

因此，若 $x = \cos\theta$，則

$$p(x) = 0 \iff \cos 6\theta = \cos 4\theta.$$

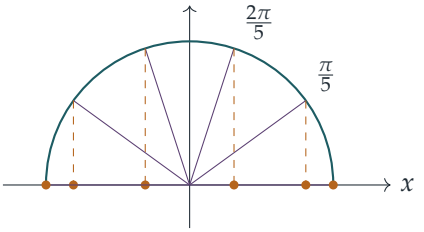
而 $\cos A = \cos B$ 當且僅當存在整數 k 使得 $A = \pm B + 2k\pi$。在這裏即是

$$6\theta = 4\theta + 2k\pi \;\Rightarrow\; \theta = k\pi, \qquad \text{或} \qquad 6\theta = -4\theta + 2k\pi \;\Rightarrow\; \theta = \frac{k\pi}{5}.$$

第一組解已包含在第二組之內，所以解為 $\theta = k\pi/5$，而對應的 $x = \cos\theta$ 的值是

$$\cos 0 = 1, \quad \cos\tfrac{\pi}{5}, \quad \cos\tfrac{2\pi}{5}, \quad \cos\tfrac{3\pi}{5} = -\cos\tfrac{2\pi}{5}, \quad \cos\tfrac{4\pi}{5} = -\cos\tfrac{\pi}{5}, \quad \cos\pi = -1.$$

k 取其他值時只會重複以上各數。這是六個互不相同的數（餘弦在 $[0,\pi]$ 上嚴格遞減），而 p 的次數（degree）為 6，所以它們就是 p 的全部根（root），不論實根還是複根。特別要留意，代換 $x = \cos\theta$ 只能涵蓋 $-1 \le x \le 1$，但我們並沒有遺漏這個區間以外的根，因為已經再沒有其他根可找了。



這些還不算是可接受的答案，因為題目不容許使用數值近似，我們應該給出這些餘弦的準確值。由於 $x = 1$ 是根，$x = -1$ 也是根（p 是偶函數），所以 $x^2 - 1$ 是一個因式（factor）。把它除去（或比較係數），

$$p(x) = (x^2 - 1)(16x^4 - 12x^2 + 1).$$

這個四次因式是 x^2 的二次式：

$$x^2 = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 64}}{32} = \frac{12 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

注意

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}, \qquad \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}.$$

x^2 的兩個值都是正數，所以各給出兩個實數 x。因此方程的實根就是以下六個數：

$$x = \pm 1, \qquad x = \pm\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \qquad x = \pm\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

額外的收穫是：按大小與上面的列表對照（$\cos\frac{\pi}{5} > \cos\frac{2\pi}{5} > 0$），便得到兩個著名的值 $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ 和 $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$。

驗算

- 當 $\theta = 0$ 時，兩個恆等式都給出 $1 = 1$；當 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時，(i) 給出 $1 = 1$，(ii) 給出 $-1 = -1$。
- p 的各係數之和為 $16 - 28 + 13 - 1 = 0$，印證了 $x = 1$ 是根。
- 以數值計算，$\frac{1+\sqrt{5}}{4} \approx 0.80902 = \cos 36°$ 及 $\frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0.30902 = \cos 72°$，而 p 在這兩點的值都是零（在捨入誤差範圍內）。

常見錯誤

- 遺漏了由 $6\theta = -4\theta + 2k\pi$ 得出的解，結果只找到 $x = \pm 1$。
- 把答案寫成 $\cos\frac{\pi}{5}$ 之類，或寫成小數：題目要求的是準確的根式（surd）形式。
- 沒有解釋為何不存在 $|x| > 1$ 的根：數一數次數便可解決。

STEP 之外

把 $\cos n\theta$ 用 $\cos\theta$ 表示的多項式，就是切比雪夫多項式（Chebyshev polynomial）T_n，所以 (i) 和 (ii) 說的是 $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ 和 $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$。切比雪夫多項式在數值分析（numerical analysis）中佔有核心地位，它們的根正是多項式插值（polynomial interpolation）的最佳取點。$\cos\frac{\pi}{5}$ 中出現 $\sqrt{5}$，反映了正五邊形的幾何與黃金比（golden ratio）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）是從幾何角度認識棣莫弗定理和單位根（roots of unity）的絕佳讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。