詳細解答

STEP I 1989，第 7 題

純數學 • 曲線描繪與最優化

STEP I 1989，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/89-s1-q7

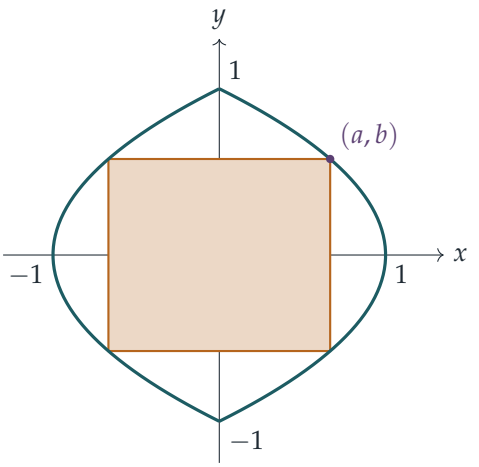
關鍵思路

這條曲線對兩條坐標軸都對稱，所以最大的長方形應以原點為中心，並有一個頂點位於第一象限的曲線上。這樣一來，原本要在兩個變量中搜尋的問題，就變成求一個單變量函數的最大值。對於一般的曲線，只要把 $|y|$ 解出來，寫成 $1-|x|$ 的冪，同樣的想法依然適用。

解答

草圖

由於 $y^2 \geq 0$，必須有 $1-|x| \geq 0$，故 $-1 \leq x \leq 1$。當 $x \geq 0$ 時，曲線是 $x = 1-y^2$，即一條開口向左、頂點（vertex）為 $(1,0)$ 的拋物線（parabola）；當 $x \leq 0$ 時，曲線是它的鏡像 $x = y^2 - 1$。兩段弧在 $(0,\pm 1)$ 相接，並在該處形成尖角（斜率 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \mp\frac{1}{2}$ 與 $\pm\frac{1}{2}$ 並不相同），又在 $(\pm 1, 0)$ 垂直地穿過 x 軸。這條曲線是一個閉合的環，圍住區域 $|x| + y^2 \leq 1$，形狀像一個圓角的菱形。



最大的長方形

設長方形 $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ 位於區域 $|x| + y^2 \leq 1$ 之內。令 $A = \max(|x_1|, |x_2|)$ 及 $B = \max(|y_1|, |y_2|)$。各頂點為 (x_i, y_j)，其中 i, j 可獨立選取，所以必有一個頂點同時滿足 $|x| = A$ 和 $|y| = B$。該頂點位於區域之內，故 $A + B^2 \leq 1$。於是長方形 $[-A, A] \times [-B, B]$ 也位於區域之內，因為當 $|x| \leq A$、$|y| \leq B$ 時，

$$|x| + y^2 \leq A + B^2 \leq 1.$$

它的闊度 $2A \geq x_2 - x_1$，高度 $2B \geq y_2 - y_1$，所以它的面積不會比原來的小。因此我們可以只考慮以原點為中心、頂點為 $(\pm a, \pm b)$ 的長方形；再把頂點向外推，直至碰到曲線為止，便有 $a = 1 - b^2$，其中 $0 \leq b \leq 1$。

? **想一想** 為甚麼只需考慮以原點為中心的長方形？

這正是上面的論證：把每條邊換成它到坐標軸的兩個距離中較大的一個，長方形仍然留在曲線之內（由對稱性可知），而且絕不會縮小。

面積為

$$S(b) = 4ab = 4b(1 - b^2) = 4b - 4b^3, \qquad S'(b) = 4 - 12b^2.$$

$S'(b) = 0$ 於 $b = 1/\sqrt{3}$，在此之前 $S' > 0$，在此之後 $S' < 0$，而且 $S(0) = S(1) = 0$，所以這就是最大值。此時 $a = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$，而

$$S_{\max} = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{27}},$$

正如所求。

一般的曲線

現在考慮 $y^{2m} = (1-|x|)^n$。左邊為非負數，而由於 n 是奇數，$(1-|x|)^n$ 與 $1-|x|$ 同號。所以同樣有 $|x| \le 1$，取（正的）$2m$ 次方根，得

$$|y| = (1-|x|)^k, \qquad k = \frac{n}{2m} > 0.$$

（假如 n 是偶數，則任何 x 都可以取，曲線會伸延至無窮遠，因而不存在最大的長方形：這就是 n 必須是奇數的原因。）這條曲線同樣是一個經過 $(\pm1, 0)$ 和 $(0, \pm1)$ 的閉合環，對兩條坐標軸都對稱，圍住區域 $|y| \le (1-|x|)^k$。由於 $(1-|x|)^k$ 隨 $|x|$ 增加而遞減，與之前相同的論證說明，我們可以取頂點為 $(\pm a, \pm b)$ 的長方形，其中 $b = (1-a)^k$，$0 \le a \le 1$。它的面積為

$$S(a) = 4a(1-a)^k.$$

求導（differentiate），得

$$S'(a) = 4(1-a)^{k-1}[(1-a) - ka] = 4(1-a)^{k-1}[1-(1+k)a],$$

當 $0 < a < \frac{1}{1+k}$ 時為正，當 $\frac{1}{1+k} < a < 1$ 時為負。由於 $S(0) = S(1) = 0$，最大值出現於 $a = \frac{1}{1+k}$，此時 $1-a = \frac{k}{1+k}$：

$$S_{\max} = \frac{4}{1+k}\left(\frac{k}{1+k}\right)^k = \frac{4k^k}{(1+k)^{k+1}}.$$

代入 $k = \frac{n}{2m}$ 及 $1+k = \frac{n+2m}{2m}$，$2m$ 的各個冪合併為 $(2m)^{-k} \cdot (2m)^{k+1} = 2m$，所以

$$S_{\max} = \frac{8m\, n^{n/(2m)}}{(n+2m)^{(n+2m)/(2m)}} = 8m\left(\frac{n^n}{(n+2m)^{n+2m}}\right)^{1/(2m)}.$$

驗算

- 取 $m = n = 1$，得 $8\left(\frac{1}{27}\right)^{1/2} = 8/\sqrt{27} \approx 1.5396$，與第一部分的結果一致。
- 對 $(m, n) = (1,3), (2,1), (2,3), (3,5)$ 在 $a \in [0,1]$ 上作精細的數值搜尋，結果與公式吻合；例如 $(m, n) = (2,1)$ 給出 $16/5^{5/4} \approx 2.1400$。隨機選取的偏離中心的長方形，面積從未超過這個值。
- 當 n 固定而 $m \to \infty$ 時，$k \to 0$，曲線逐漸填滿正方形 $|x| \le 1$、$|y| \le 1$；公式的值趨向 4，正是該正方形的面積。

常見錯誤

- 漏掉因子 4：頂點 (a, b) 所對應的長方形，闊度是 $2a$，高度是 $2b$。
- 忽略 n 為奇數的重要性：若 n 是偶數，曲線便不是有界的。

STEP 之外

求 $a(1-a)^k$ 的最大值，其實是一道喬裝了的加權算術—幾何平均不等式（weighted AM–GM）問題：把 $a \cdot \left(\frac{1-a}{k}\right)^k$ 寫成 $1+k$ 個和為常數的因子之積，無須微積分便可求得最大值。曲線 $|x|^p + |y|^q = 1$ 與 ℓ^p 範數（norm）的單位球（unit ball）是近親，後者會在大學一年級的分析和線性代數中出現。想進一步了解這類不等式，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；至於最優化（optimisation）背後的分析，則可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。