詳細解答

STEP I 1989，第 6 題

純數學 • 法線與微分方程

STEP I 1989，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/89-s1-q6

關鍵思路

在 P 點的法線（normal）斜率（gradient）為 $-1/\mathrm{f}'(x)$，所以要求 Q，只須把 $X=0$ 代入法線方程。於是 PQ^2 就是水平距離的平方加上垂直距離的平方，而題目給出的長度便化成一條只含 $\mathrm{f}'(x)$ 的方程。唯一要留神的是最後開平方的一步：正負號的取捨由極小點（minimum point）決定。

解答

Q 的 y 坐標

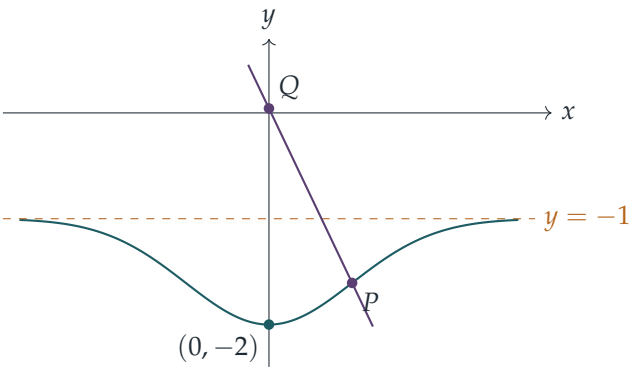
在 $P=(x,\mathrm{f}(x))$ 處，切線（tangent）的斜率為 $\mathrm{f}'(x)$，所以（只要 $\mathrm{f}'(x)\neq 0$）法線的斜率為 $-1/\mathrm{f}'(x)$。以 (X,Y) 表示法線上動點的坐標，法線方程為

$$Y-\mathrm{f}(x)=-\frac{1}{\mathrm{f}'(x)}\,(X-x).$$

代入 $X=0$，法線與 y 軸相交於

$$Y=\mathrm{f}(x)+\frac{x}{\mathrm{f}'(x)},\qquad \text{所以}\qquad Q=\left(0,\ \mathrm{f}(x)+\frac{x}{\mathrm{f}'(x)}\right).$$

（若 $\mathrm{f}'(x)=0$，法線是鉛垂線，除非 $x=0$，否則它永不與 y 軸相交。）



微分方程（differential equation）

P 與 Q 的水平距離為 x，垂直距離為 $x/\mathrm{f}'(x)$，所以

$$PQ^2 = x^2 + \frac{x^2}{(\mathrm{f}'(x))^2}.$$

令上式等於 $\mathrm{e}^{x^2} + x^2$，兩邊的 x^2 項互相抵消，得到

$$\frac{x^2}{(\mathrm{f}'(x))^2} = \mathrm{e}^{x^2}, \qquad \text{即} \qquad \boxed{(\mathrm{f}'(x))^2 = x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}.}$$

這等價於 $\mathrm{f}'(x) = \pm x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$。

極小點位於 $(0,-2)$ 的曲線

想一想 應該取哪一個正負號？正負號又會否在曲線中途改變？

由於 f′ 連續（continuous）（曲線有極小點，所以我們假設它可微（differentiable）），而 $\mathrm{f}'(x)^2 = x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ 只在 $x = 0$ 時為零，因此 f′ 在 $x > 0$ 上或在 $x < 0$ 上都不可能變號：要變號就必須經過零。要使 $(0,-2)$ 成為極小點，f 必須在緊靠 0 的左方遞減，在緊靠其右方遞增，所以當 $x < 0$ 時 $\mathrm{f}'(x) < 0$，當 $x > 0$ 時 $\mathrm{f}'(x) > 0$。這正好與 x 的正負號相同，因此在兩邊都有

$$\mathrm{f}'(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

（若全程取負號，則在 $x = 0$ 處得到極大點；若兩邊取不同的正負號，則 f′ 的正負號保持不變，即得到拐點（point of inflection）。）

進行積分，由於 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-x^2/2}) = -x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$，

$$\mathrm{f}(x) = -\mathrm{e}^{-x^2/2} + c.$$

由條件 $\mathrm{f}(0) = -2$ 得 $-1 + c = -2$，所以 $c = -1$，曲線為

$$\boxed{y = -1 - \mathrm{e}^{-x^2/2}.}$$

它在 $x = 0$ 處取得極小值 -2，並在兩邊向漸近線（asymptote）$y = -1$ 上升，一如略圖所示。

驗算

- 在 $x = 1$ 處：$\mathrm{f}(1) = -1 - \mathrm{e}^{-1/2} \approx -1.6065$，而 $\mathrm{f}'(1) = \mathrm{e}^{-1/2} \approx 0.6065$，所以 $Q \approx (0,\, 0.0422)$，且 $PQ \approx \sqrt{1 + 1.6487^2} \approx 1.9283$，等於 $\sqrt{\mathrm{e} + 1}$，符合要求。
- 電腦在 2000 個隨機點上，以法線與 y 軸的交點重新計算 Q，所得的 PQ 與 $\sqrt{\mathrm{e}^{x^2} + x^2}$ 相符，（相對）誤差在 10^{-15} 以內。

常見錯誤

- 誤用切線的斜率 $\mathrm{f}'(x)$，而不是法線的斜率 $-1/\mathrm{f}'(x)$，結果得出 Q 位於 $\mathrm{f}(x) - x\mathrm{f}'(x)$。
- 開平方時直接寫 $\mathrm{f}'(x) = x\mathrm{e}^{-x^2/2}$，卻沒有說明為何捨去負號。

STEP 之外

在這一題，一個對曲線上每一點都成立的幾何條件，化成了一條一階微分方程，但方程中的 f' 以平方形式出現，所以要靠額外的資料選定分支，才能確定唯一的解。這類沒有就 y' 解出的方程，正是常微分方程（ODE）的唯一性定理（uniqueness theorem）開始需要小心處理的地方，並由此引申到包絡線（envelope）和奇解（singular solution）。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations* 涵蓋一階方程及其存在性與唯一性理論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。