詳細解答

STEP I 1989，第 5 題

純數學 • 二項式係數恆等式

> **STEP I 1989，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q5

關鍵思路

二項展開式（binomial expansion）是關於 x 的恆等式（identity），所以無論代入甚麼數都成立。取 $x = 1$ 會把所有係數（coefficient）加起來，取 $x = -1$ 則以正負相間的符號把它們相加；把兩者結合，就能把偶數項與奇數項的係數分開。至於 (ii) 中的加權和，$\binom{n}{r}$ 前面的因子 r 正好是對 x^r 求導時產生的，所以我們先對展開式求導（differentiate），然後再代入。

解答

對正整數 n，

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n,$$

其中 $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$。這對所有實數 x 都成立。

第 (i) 部分

設 $E = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$ 為偶數項係數之和，$O = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1}$ 為奇數項係數之和。由於 n 是偶數，最後一項 $\binom{n}{n}$ 屬於 E，而 $\binom{n}{n-1}$ 屬於 O，所以 E 與 O 合起來恰好包含每個係數一次。

在展開式中代入 $x = 1$，得

$$E + O = 2^n.$$

代入 $x = -1$，每個偶數次冪 $(-1)^r$ 都是 $+1$，每個奇數次冪都是 -1，而由於 $n \geq 1$，左

方是 $0^n = 0$。所以

$$E - O = 0.$$

因此 $E = O$，於是 $2E = 2^n$，故

$$E = O = 2^{n-1},$$

這就是所求的結果。

第 (ii) 部分

把展開式兩邊對 x 求導。常數項消失，而 x^r 變成 rx^{r-1}：

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}.$$

現在代入 $x = 1$：

$$n2^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n},$$

正如所求。這對所有正整數 n 都成立，不論奇偶。

想一想 有沒有不用微積分（calculus）也能看出第 (ii) 部分的方法？

有。由於對 $1 \le r \le n$ 有 $r\binom{n}{r} = r \cdot \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} = n \cdot \dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} = n\binom{n-1}{r-1}$，在 $(1+x)^{n-1}$ 的展開式中代入 $x = 1$，便知這個和等於 $n\sum_{r=1}^{n}\binom{n-1}{r-1} = n \cdot 2^{n-1}$。用文字來說：從 n 個人中選出一個人數不限的委員會，再從委員會中選出一位主席，這等同於先選主席（n 種方法），再從其餘 $n-1$ 個人中任選一個子集（subset）（2^{n-1} 種方法）。

最後的和

把這個和拆成兩部分：

$$\sum_{r=0}^{n}(r + (-1)^r)\binom{n}{r} = \sum_{r=0}^{n} r\binom{n}{r} + \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}.$$

第一個和中 $r = 0$ 的一項是零，所以第一個和正是 (ii) 中的和，即 $n2^{n-1}$。第二個和是 $(1+x)^n$ 的展開式在 $x = -1$ 時的值，即對所有正整數 n 都有 $(1-1)^n = 0$。（這就是 (i) 中 $E - O = 0$ 的那一步；它只需要 $n \ge 1$，不需要 n 是偶數。）因此

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n}(r + (-1)^r)\binom{n}{r} = n2^{n-1}.}$$

驗算

- 當 $n = 2$：係數為 $1, 2, 1$，所以 $E = 1 + 1 = 2 = O$，而 $2^1 = 2$。(ii) 中的和是 $2 + 2 \cdot 1 = 4 = 2 \cdot 2^1$。
- 當 $n = 3$，最後的和是 $(0+1)\cdot 1 + (1-1)\cdot 3 + (2+1)\cdot 3 + (3-1)\cdot 1 = 1 + 0 + 9 + 2 = 12 = 3 \cdot 2^2$。
- 我們對 1 至 29 的每個 n 都精確地驗證了全部三個恆等式；例如 $n = 6$ 給出 $192 = 6 \cdot 2^5$。

常見錯誤

- 忘記了 $\sum(-1)^r\binom{n}{r} = 0$ 對奇數 n 同樣成立，因而以為最後的答案取決於 n 的奇偶性（parity）。它只在 $n = 0$ 時才不成立，而這裏 n 是正數。
- 在 (ii) 中先代入 $x = 1$ 才求導。代入必須放在最後：一旦 x 成了一個數，就再沒有甚麼可以求導了。

STEP 之外

把多項式（polynomial）看成儲存係數的倉庫，然後透過代入、求導或相乘來提取資訊，這就是*生成函數*（generating function）的想法，它是組合數學（combinatorics）和概率論中最強大的工具之一。若代入的不是 ± 1 而是複數單位根（roots of unity），便能以同樣的方式抽出每隔三項或每隔四項的係數；而對概率生成函數（probability generating function）求導，就得到分佈的平均值（mean），正如在這裏它給出了 $\sum r\binom{n}{r}$ 一樣。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）展示了生成函數的實際應用。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。