詳細解答

STEP I 1989，第 4 題

純數學 • 拉姆齊理論

> **STEP I 1989，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q4

本題在 *Beyond STEP* 第 9.2 節小型版的拉姆齊定理中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/ramsey.html

關鍵思路

先把幾何放在一旁：題目對各點所設的條件，只是保證任意三點都構成一個真正的三角形，所以這純粹是一個為連接六點的 15 條邊着色的問題。按照提示，先看其中一點。它連出五條邊，而顏色只有兩種，所以根據鴿巢原理（pigeonhole principle），這些邊之中至少有三條同色。這三條邊另一端的三點之間的邊，要麼與最初那一點合成一個單色三角形，要麼自己構成一個單色三角形。

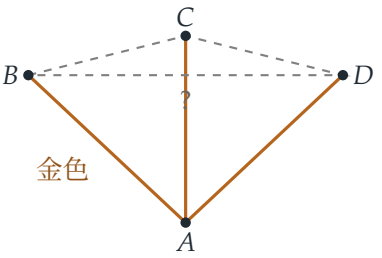
解答

六點

由於任意三點都不共線（collinear），任意三點都是一個真正的三角形的頂點，而它的三條邊都在我們所畫的線段之中。（任意四點不共面（coplanar）這個條件，在論證中用不着。）

考慮由 A 連出的五條線段 AB, AC, AD, AE, AF。每條線段不是金色就是銀色。假如金色的最多兩條，銀色的也最多兩條，線段總數便最多只有四條，這與事實不符。所以其中至少有三條同色。把 $B, \ldots, F$ 各點重新標記，並在有需要時把兩種顏色的名稱對調，我們可以假設

$$AB,\ AC,\ AD \text{ 全是金色。}$$



現在看看連接另一端三點的三條線段 BC、CD 和 DB。

想一想 無論 BC、CD 和 DB 是甚麼顏色，為甚麼以下兩種情況之中必有一種會給出單色三角形？

只有兩種可能。

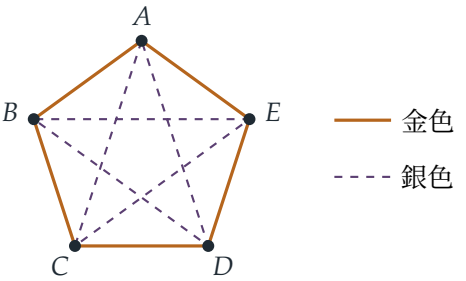
- BC, CD, DB 之中至少有一條是金色。設它是 BC（其餘情況只是把字母換一換，道理相同）。那麼 AB、AC 和 BC 全是金色，所以三角形 ABC 的邊都是同一種顏色。
- BC, CD, DB 之中沒有一條是金色。那麼三條都是銀色，三角形 BCD 的邊都是同一種顏色。

無論哪一種情況，都有一個各邊同色的三角形，這正是我們要證明的。

五點

若只有五點，每一點只連出四條邊，可以分成兩條一種顏色、兩條另一種顏色，於是上述論證不再成立。要說明結論確實不成立，我們需要找出一種沒有單色三角形的着色方法。

把 A, B, C, D, E 五點依次放在一個五邊形的頂點上。把五條邊 AB, BC, CD, DE, EA 塗成金色，五條對角線 AC, BD, CE, DA, EB（即五角星）塗成銀色。



任何三角形都用上五點之中的三點。在五邊形的任意三個頂點之中，至少有兩個並不相鄰（若三個頂點兩兩相鄰，5-圈之內便要有一個三角形），所以每個三角形都有一條銀色

的邊。此外，任意三個頂點之中也至少有兩個是相鄰的：假如三個頂點兩兩不相鄰，那麼沿五邊形走一圈，每兩個相繼的選定頂點之間都至少隔着一個未被選中的頂點，這就需要 $3+3=6$ 點。所以每個三角形也有一條金色的邊。因此沒有任何三角形是單色的。

想一想 正五邊形是平的，所以它有四個頂點共面。這不是違反了關於一般位置的規定嗎？

假如各點真的在同一平面上，那確實違反了規定；但着色只取決於哪兩點相連，而與各點的位置無關。把各頂點稍稍提離平面，而且各自升高不同的幅度（例如把第 k 個頂點升到高度 $0.3k^2$，其中 $k=0,1,2,3,4$）。這樣便沒有三點共線，也沒有四點共面，而從上方看下去，圖形仍然是這裏所畫的五邊形和五角星，着色相同，也沒有單色三角形。

驗算

六點的邊只有 $2^{15}=32768$ 種着色方法，所以可以用電腦逐一檢驗：每一種都有單色三角形，而且事實上總有至少兩個。至於五點，把五邊形着色中全部 $\binom{5}{3}=10$ 個三角形逐一檢查，可以確認每個都有兩種顏色。再用行列式（determinant）檢驗，可以確認上面升高了的五邊形沒有四點共面。

常見錯誤

- 只說「由對稱性」而沒有交代假設了甚麼：要明確說明，你是從 A 連出的邊之中選出佔多數顏色的三條，並把那種顏色稱為金色。
- 只證明了 A 有三條同色的邊便停下來；第二步，即考察 BC、CD、DB，才是這個證明的核心。
- 處理五點時，只畫一個草圖而沒有檢查每一個三角形；像「由 A 連出的星形塗金色，其餘全塗銀色」這樣的着色是行不通的。

STEP 之外

這是拉姆齊理論（Ramsey theory）的第一個例子：拉姆齊數（Ramsey number）$R(3,3)$ 是使得完全圖（complete graph）K_n 的邊的每一種雙色着色都含有單色三角形的最小的 n，而本題正好證明了 $R(3,3)=6$。拉姆齊定理（Ramsey's theorem）指出，無論要求的單色完全子圖有多大，這樣的數都存在，但它們極難計算：就連 $R(5,5)$ 也仍然未知。Wilson 的 *Introduction to Graph Theory*（圖論入門）是一本很出色的圖論（graph theory）入門書，當中也講到拉姆齊定理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。