詳細解答

STEP I 1989，第 3 題

純數學 • 向量與純量積

> **STEP I 1989，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q3

關鍵思路

以 O 為原點（origin），把一切都用兩個向量（vector）$\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 表示。這樣，「垂直（perpendicular）」就變成「純量積（scalar product）為零」，而由於 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=1$，這個純量積只取決於 x、OY 和唯一的未知量 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$。利用 $OX+OY=1$，便只剩下一條聯繫 x 與 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 的方程。至於上下界，則取決於 x 可以在多大的範圍內變動。

解答

條件

取 O 為原點，並記 $k=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$。由於 C 位於由 A 到 B 的三分之一處，而 D 位於三分之二處，

$$\overrightarrow{OC}=\mathbf{a}+\tfrac{1}{3}(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\tfrac{1}{3}(2\mathbf{a}+\mathbf{b}),\qquad \overrightarrow{OD}=\tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+2\mathbf{b}).$$

由於 X 在 OA 上，且 $OX=x$ 及 $|\mathbf{a}|=1$，故有 $\overrightarrow{OX}=x\mathbf{a}$。同理 $\overrightarrow{OY}=y\mathbf{b}$，其中 $y=OY=1-x$。所以

$$3\overrightarrow{CY}=(3y-1)\mathbf{b}-2\mathbf{a},\qquad 3\overrightarrow{DX}=(3x-1)\mathbf{a}-2\mathbf{b}.$$

兩條直線垂直，當且僅當純量積為零。展開並利用 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=1$，得

$$\begin{aligned}9\overrightarrow{CY}\cdot\overrightarrow{DX}&=(3x-1)(3y-1)k-2(3y-1)-2(3x-1)+4k\\&=k[(3x-1)(3y-1)+4]-2(3x+3y-2).\end{aligned}$$

現在利用 $x+y=1$。於是 $3x+3y-2=1$，並且

$$(3x-1)(3y-1)=9xy-3(x+y)+1=9xy-2.$$

所以垂直的條件變成 $k(9xy+2)=2$。代入 $y=1-x$，即

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{2}{9x(1-x)+2}}$$

（分母至少為 2，所以除以它並無問題）。

上下界

X 位於線段 OA 上，而該線段的長度為 1，所以 $0\le x\le 1$。（這時 $y=1-x$ 也在 $[0,1]$ 之內，所以 Y 自然在 OB 上。）在這個區間上

$$x(1-x)=\tfrac{1}{4}-(x-\tfrac{1}{2})^2,$$

所以 $0\le x(1-x)\le\frac{1}{4}$，其中極大值在 $x=\frac{1}{2}$ 取得，極小值在 $x=0$ 或 1 取得。因此

$$2\le 9x(1-x)+2\le\tfrac{9}{4}+2=\tfrac{17}{4}.$$

取倒數會把不等式（inequality）的方向倒轉（各項皆為正數），再乘以 2 便得

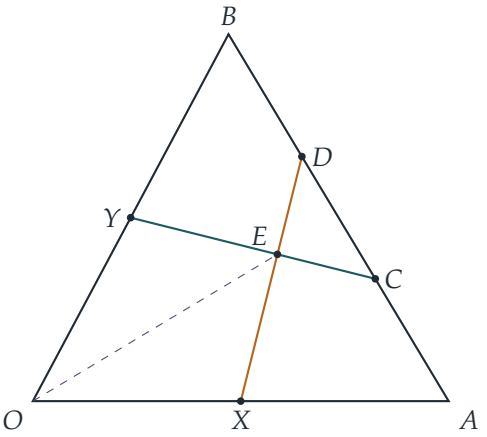
$$\frac{8}{17}\le\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\le 1,$$

正如所求。（取值 1 需要 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$，這並不構成真正的三角形，所以實際上 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}<1$；題目所述的不等式仍然成立。）

最大的角與 OE

? **想一想** 為甚麼最大的角對應的是 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 的最小值？

由於 $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1$，$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\cos A\hat{O}B$，而餘弦在 $[0,\pi]$ 上是遞減的。所以當 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{8}{17}$ 時，即當 $x=\frac{1}{2}$（因而 $y=\frac{1}{2}$）時，這個角最大。這時 X 和 Y 分別是 OA 和 OB 的中點，而這個角為 $\arccos\frac{8}{17}\approx 61.9°$。



現在，把 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 對調，整個圖形是對稱的：這樣對調會交換 $A \leftrightarrow B$、$C \leftrightarrow D$ 和 $X \leftrightarrow Y$，因而交換直線 CY 和 DX。所以它們的交點 E 在對調之下保持不變，亦即它位於對稱軸（line of symmetry）上：對某個 t 有 $\overrightarrow{OE} = t(\mathbf{a}+\mathbf{b})$。

DX 上的一般點為

$$\overrightarrow{OX} + s\overrightarrow{XD} = \tfrac{1}{2}\mathbf{a} + s(\tfrac{1}{3}\mathbf{a} + \tfrac{2}{3}\mathbf{b} - \tfrac{1}{2}\mathbf{a}) = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{s}{6})\mathbf{a} + \tfrac{2s}{3}\mathbf{b}.$$

由於 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 不平行，我們可以比較係數：當 $\frac{1}{2} - \frac{s}{6} = \frac{2s}{3}$ 時，這是 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 的倍數，由此得 $s = \frac{3}{5}$ 及 $t = \frac{2}{5}$。所以 $\overrightarrow{OE} = \frac{2}{5}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$。最後

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 2 + \tfrac{16}{17} = \tfrac{50}{17},$$

所以

$$OE = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{50}{17}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \boxed{\frac{2\sqrt{34}}{17}} \approx 0.686.$$

驗算

- 用坐標表示，取 $\mathbf{a} = (1,0)$ 及 $\mathbf{b} = (\frac{8}{17}, \frac{15}{17})$。於是 $X = (\frac{1}{2}, 0)$，$D = (\frac{11}{17}, \frac{10}{17})$，所以 $\overrightarrow{XD} = (\frac{5}{34}, \frac{10}{17})$。另外 $Y = (\frac{4}{17}, \frac{15}{34})$ 及 $C = (\frac{14}{17}, \frac{5}{17})$，所以 $\overrightarrow{CY} = (-\frac{10}{17}, \frac{5}{34})$。它們的純量積為 $-\frac{50}{578} + \frac{50}{578} = 0$，正如所料。
- $E = \frac{2}{5}(\frac{25}{17}, \frac{15}{17}) = (\frac{10}{17}, \frac{6}{17})$，而 $|OE| = \frac{\sqrt{136}}{17} = \frac{2\sqrt{34}}{17} \approx 0.6860$。這與直接以數值方法求兩條直線交點所得的結果吻合。
- $s = \frac{3}{5}$ 這個值在 $[0,1]$ 之內，所以 E 確實位於 X 與 D 之間，在三角形之內。

常見錯誤

- 忘記了 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 1$（以致在條件中留下 $|\mathbf{a}|^2$ 的項），或者把兩個三等分點（trisection points）的位置調轉了。
- 以為最大的角對應最大的 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$：角愈大，餘弦愈小。
- 寫成 $\overrightarrow{OX} = x$ 而不是 $x\mathbf{a}$。點 X 是以向量表示的；x 只是它的長度。

STEP 之外

這裏的方法，是把每一點寫成兩個基向量（basis vectors）的組合，並把幾何問題化為純量積；這正是學習內積（inner product）和格拉姆矩陣（Gram matrix）的起點。一組向量的構形，在不計旋轉的意義下，完全由它的純量積表決定，而在這裏該表只有 1、1 和

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$。這就是整道題目可以歸結為一個數的原因。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）對這些想法有詳細的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。