詳細解答

STEP I 1989，第 2 題

純數學 • 黎曼和與極限

> **STEP I 1989，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q2

關鍵思路

這個古怪的式子，其實只是一些長方形面積之和的偽裝。如果直接寫出 n 個長方形的總面積，會得到一個含有 $k\ln k$ 的和；那些階乘（factorial）的對數，不過是把同一個和重新分組而已。只要把兩者對上，極限（limit）就是那個積分，而第一部分正好讓我們把它算出來。

解答

不定積分

用分部積分法（integration by parts），取 $u=\ln x$ 和 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=x$，於是 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$ 而 $v=\frac{1}{2}x^2$，

$$\begin{aligned}\int x\ln x\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}x^2\ln x-\int \tfrac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \tfrac{1}{2}x^2\ln x-\tfrac{1}{4}x^2+C.\end{aligned}$$

積分的值

由於 $\ln(1/x)=-\ln x$，被積函數（integrand）是 $-x\ln x$。被積函數在 $x=0$ 處沒有定義，所以我們先在 $[\varepsilon,1]$ 上積分，再令 $\varepsilon\to 0^+$：

$$\int_{\varepsilon}^{1} x\ln(1/x)\,\mathrm{d}x=\left[\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{1}{2}x^2\ln x\right]_{\varepsilon}^{1}=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\varepsilon^2+\tfrac{1}{2}\varepsilon\,(\varepsilon\ln\varepsilon).$$

當 $\varepsilon\to 0$ 時，$\varepsilon^2\to 0$ 且 $\varepsilon\ln\varepsilon\to 0$（即題目給出的事實），所以

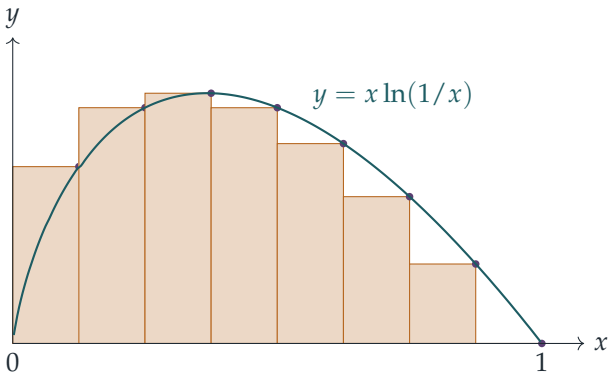
$$\int_0^1 x\ln(1/x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

同一個事實也說明，當 $x \to 0^+$ 時 $f(x) = x\ln(1/x)$ 趨向 0，所以只要定義 $f(0) = 0$，f 就在整個 $[0,1]$ 上連續（continuous）。曲線由 0 上升，在 $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ 處（該處 $f'(x) = -\ln x - 1 = 0$）達到極大值 $\frac{1}{\mathrm{e}}$，然後在 $x = 1$ 處回落到 0。

長方形

把 $[0,1]$ 分成 n 條闊度為 $\frac{1}{n}$ 的長條。第 k 條是 $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$，其上的長方形的右上角落在曲線上，所以它的高是

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n}\ln\frac{n}{k} = \frac{k}{n}(\ln n - \ln k).$$



因此，這些長方形的總面積是

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}(\ln n - \ln k) &= \frac{\ln n}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k \\ &= \frac{\ln n}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k. \end{aligned}$$

第一項已經與我們想要的式子吻合。

? **想一想** 那些階乘是從哪裏來的？

對於 $0 \le m \le n-1$，

$$\ln\frac{n!}{m!} = \ln((m+1)(m+2)\cdots n) = \sum_{k=m+1}^{n} \ln k.$$

現在把 $m = 0, 1, \ldots, n-1$ 的這些式子加起來，並數一數每個 $\ln k$ 出現了多少次。$\ln k$ 這一項恰好在 $m+1 \le k$ 時出現，即 $m = 0, 1, \ldots, k-1$ 的時候：一共 k 次。因此

$$\ln\frac{n!}{0!} + \ln\frac{n!}{1!} + \cdots + \ln\frac{n!}{(n-1)!} = \sum_{k=1}^{n} k\ln k.$$

（例如取 $n=3$：$\ln 6+\ln 6+\ln 3=\ln 1+2\ln 2+3\ln 3$，兩邊都等於 $\ln 108$。）所以題目中的式子正正就是 S_n，即 n 個長方形的面積。

極限

當 $n\to\infty$ 時，長方形與曲線貼合得越來越緊密，而由於 f 在 $[0,1]$ 上連續，長方形的總面積趨向曲線下的面積。因此

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n-\frac{1}{n^2}\left[\ln\frac{n!}{0!}+\ln\frac{n!}{1!}+\cdots+\ln\frac{n!}{(n-1)!}\right]=S_n\to\int_0^1 x\ln(1/x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$$

這正是所要證明的結果。

如果你想要比「長方形貼合得越來越緊密」更紮實的說法，這裏有一個上界。在每一條長條上，長方形的面積與曲線下的面積相差至多為 $\frac{1}{n}$ 乘以 f 在該長條上的變化幅度。把所有長條上的變化幅度加起來：f 上升了 $\frac{1}{\mathrm{e}}$，又回落了 $\frac{1}{\mathrm{e}}$，所以總和至多為 $\frac{2}{\mathrm{e}}$。因此 $|S_n-\frac{1}{4}|\le\frac{2}{\mathrm{e}n}\to 0$。

驗算

- 對第一部分的答案求導：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2\right)=x\ln x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x=x\ln x$。
- 取 $n=2$ 時，式子的值是 $\frac{3}{4}\ln 2-\frac{1}{4}(\ln 2+\ln 2)=\frac{1}{4}\ln 2\approx 0.173$，這正是兩個長方形的面積 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\cdot 0$。
- 數值上，式子的值在 $n=10$ 時約為 0.24559，在 $n=100$ 時約為 0.249937，在 $n=1000$ 時約為 0.2499992，逐步逼近 $\frac{1}{4}$。

常見錯誤

- 弄丟正負號：被積函數是 $x\ln(1/x)=-x\ln x$，所以第一部分求得的原函數（antiderivative）必須取負，面積是 $+\frac{1}{4}$，而不是 $-\frac{1}{4}$。
- 把 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 誤寫成 $\sum k=\frac{1}{2}n^2$：這樣括號內的 $\frac{1}{n}$ 就會不見了。
- 忘記這個積分在 0 處是瑕積分（improper integral）：處理下限時需要用到 $x\ln x\to 0$ 這個事實，而題目已經給出。

STEP 之外

這個長方形面積之和是一個黎曼和（Riemann sum）；對於閉區間上的每一個連續函數，黎曼和都收斂到積分，這是大學分析課程中最早遇到的重要定理之一。我們所用的上

界，考慮的是 f 升降的總幅度，這正是有界變差（bounded variation）函數的想法。反過來看，這道題也提供了關於 $\sum k \ln k$ 的資訊；這個量與超階乘（hyperfactorial）$1^1\,2^2 \cdots n^n$ 密切相關，而後者的增長速度可以用類似 $n!$ 的斯特靈公式（Stirling's formula）的思路更精確地求出。Abbott 的 *Understanding Analysis* 仔細地建立了黎曼積分的理論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。