詳細解答

STEP I 1989，第 16 題

概率與統計 • 零和博弈

> **STEP I 1989，第 16 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q16

本題在 *Beyond STEP* 第 12.14 節混合策略中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/mixed-strategies.html

關鍵思路

一切都源自一個小小的表：九對猜測各自對應的 B 的贏款。只要把這個表寫下來，每個期望值（expected value）都不過是表中各項的加權和。至於最後一部分，把總和按 A 的概率 a_j 分組，「無論 A 怎樣做」便化為對三個係數的條件，而要令三者皆為非負，只需解一個小型的線性不等式組。

解答

設 $w(i,j)$ 為在 A 猜 i、B 猜 j 的一局中 B 的贏款（以英鎊計）。按規則逐一讀出：

- 若 $|i-j|=2$，說 1 的一方付給說 3 的一方兩英鎊，故 $w(1,3)=2$ 及 $w(3,1)=-2$；
- 若 $|i-j|=1$，說較大數字的一方付出一英鎊，故 $w(2,1)=w(3,2)=1$ 及 $w(1,2)=w(2,3)=-1$；
- $w(i,i)=0$。

	B 說 1	B 說 2	B 說 3
A 說 1	0	-1	2
A 說 2	1	0	-1
A 說 3	-2	1	0

留意 $w(j,i) = -w(i,j)$：規則對兩名玩家一視同仁，所以把兩人的猜測對調，付款的一方也隨之對調。

第 (i) 部分

若 A 總是說 N，B 應沿着表的第 N 行看，並總是選取最大的一項。

- $N = 1$：B 總是說 3，每局贏 £2。
- $N = 2$：B 總是說 1，每局贏 £1。
- $N = 3$：B 總是說 2，每局贏 £1。

在每種情況下，這個選擇都是唯一的最佳選擇，其他任何回應不是一無所獲，就是輸錢。

第 (ii) 部分

在任何一局中，A 的猜測與 B 的猜測互相獨立（independent）（A 自行隨機選取，而 B 則暗中決定），所以 A 說 i 而 B 說 j 的概率是 $\frac{1}{3}b_j$。因此 B 的期望贏款是

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(W) &= \sum_{j=1}^{3} b_j \cdot \tfrac{1}{3}\big(w(1,j) + w(2,j) + w(3,j)\big) \\ &= \tfrac{1}{3}\big(b_1(0+1-2) + b_2(-1+0+1) + b_3(2-1+0)\big) \\ &= \tfrac{1}{3}\,(b_3 - b_1).\end{aligned}$$

由於 $b_3 \le 1$ 及 $b_1 \ge 0$，此值至多為 $\frac{1}{3}$，而等號恰好在 $b_3 = 1$ 時成立（這時必有 $b_1 = b_2 = 0$）。所以 B 應該總是猜 3，這樣每局的期望贏款是 £$\frac{1}{3}$。面對均勻隨機選取的 A，猜 3 會贏 £2、輸 £1 或打和，概率各為 $\frac{1}{3}$。

第 (iii) 部分

設 A 以概率 a_i 猜 i，B 以概率 b_j 猜 j，兩者獨立，則

$$\mathrm{E}(W) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i b_j\, w(i,j).$$

按每個 a_i 合併各項（每次取表中的一行）：

$$\mathrm{E}(W) = \underbrace{(2b_3 - b_2)}_{X}\, a_1 + \underbrace{(b_1 - b_3)}_{Y}\, a_2 + \underbrace{(b_2 - 2b_1)}_{Z}\, a_3.$$

我們希望 $X \ge 0$、$Y \ge 0$ 及 $Z \ge 0$，即

$$b_2 \le 2b_3, \qquad b_3 \le b_1, \qquad 2b_1 \le b_2.$$

把這些不等式串連起來，得 $b_2 \le 2b_3 \le 2b_1 \le b_2$，所以全部都必須是等式：$b_3 = b_1$ 及 $b_2 = 2b_1$。連同 $b_1 + b_2 + b_3 = 1$，便得

$$b_1 = \tfrac{1}{4}, \qquad b_2 = \tfrac{1}{2}, \qquad b_3 = \tfrac{1}{4},$$

這時 $X = Y = Z = 0$，當然都是非負的。所以這樣的選擇確實存在（而且事實上是唯一的一個）。

想一想 B 能否做得更好，令 X、Y 和 Z 全部嚴格為正？

不能。對任何 b_j，

$$b_1X + b_2Y + b_3Z = b_1(2b_3 - b_2) + b_2(b_1 - b_3) + b_3(b_2 - 2b_1) = 0,$$

這不過是說，B 與另一個自己對賽時不賺不蝕（這個表是反對稱（antisymmetric）的）。以總和為 1 的非負權重對 X, Y, Z 取加權和，若三者皆為正數，結果不可能是零。這就是為甚麼上面的不等式只能以等號成立。

現在來作出推論。取 $b = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$，則對任何 a_1, a_2, a_3 的選擇，都有

$$\mathrm{E}(W) = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 = 0$$

；更一般地，只要 $X, Y, Z \ge 0$，便有 $\mathrm{E}(W) = Xa_1 + Ya_2 + Za_3 \ge 0$，因為每個 $a_i \ge 0$。B 在不同局的贏款是獨立同分佈（independent and identically distributed）的（兩名玩家的猜測在各局之間互相獨立），每局的平均值至少為 0。根據大數定律（law of large numbers），經過許多局之後，B 每局的平均贏款會趨向這個平均值，所以長遠而言，無論 A 怎樣做，B 都不會輸錢。 □

驗算

- 第 (ii) 部分是第 (iii) 部分在 $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$ 時的特殊情況：$\frac{1}{3}(X + Y + Z) = \frac{1}{3}(b_3 - b_1)$，與之前所得相符。
- 第 (i) 部分是 a 把全部權重放在 N 上的情況：當 $N = 1$ 時，$\mathrm{E}(W) = X = 2b_3 - b_2$，在 $b_3 = 1$ 時取得最大值，即 2。
- 模擬 2×10^5 局，B 採用 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$，A 採用 $(0.6, 0.1, 0.3)$，所得的平均贏款約為每局 -0.004，與 0 吻合。

常見錯誤

- 把正負號的規定弄反：相差 1 時，付款的是猜較大數字的一方，但相差 2 時，付款的卻是猜較小數字的一方。應先把表列出，再檢查它是否反對稱。

- 從第 (ii) 部分推斷 B 應該混合不同的猜測。面對一個固定的混合策略（mixed strategy），最佳回應總是一個純策略（pure strategy）（這裏是總是猜 3）；只有當 B 必須防範 A 的每一個策略時，混合才有好處，正如第 (iii) 部分那樣。

STEP 之外

這是一個二人零和博弈（two-player zero-sum game），而第 (iii) 部分是馮·諾伊曼（von Neumann）極小極大定理（minimax theorem）的一個小型例子：B 有一個混合策略，無論 A 怎樣做，都能保證他至少取得博弈的值；又因為這個博弈是對稱的，所以該值為 0。尋找這樣的策略是一個線性規劃（linear programming）問題，它把概率與最優化及經濟學連繫起來。概率方面，可參閱 Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（概率入門教材）；至於博弈本身，Binmore 的 *Playing for Real*（博弈論入門讀物）是很好的入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。