詳細解答

STEP I 1989，第 13 題

力學 • 涉及摩擦力的梯子平衡

STEP I 1989，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

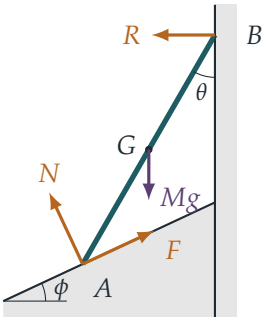
step.maths.org/questions/89-s1-q13

關鍵思路

這是一道三個力再加摩擦力的平衡（equilibrium）問題，竅門在於選對方向。以梯腳為支點取力矩（moments），可同時消去 N 和 F，立刻得出牆的反作用力。接着，我們不沿水平和鉛垂方向分解，而是*沿垂直於斜面和平行於斜面的方向*分解。這樣得出的兩條方程各自只含未知量 N 和 F 的其中一個，題目給出的公式便直接得出。

解答

我們把梯子模型化為一根長度為 $2a$ 的均勻桿（uniform rod）AB，其質心（centre of mass）G 位於中點。梯腳 A 置於粗糙斜面上，梯頂 B 靠在光滑的牆上，因此牆的反作用力 R 沿水平方向，指向遠離牆的一方。在 A 點有垂直於斜面的法向反作用力（normal reaction）N 和沿斜面的摩擦力（friction）F。梯子若要滑動，梯腳會沿斜面向下滑，遠離牆壁，所以我們取 F 的方向為沿斜面向上、指向牆壁。（稍後求得的 F 的公式為正數，印證了這個選擇。）



牆的反作用力

以 A 為支點取力矩，可消去 N 和 F。梯子與鉛垂線的夾角為 θ，所以 B 比 A 高 $2a\cos\theta$，而 G 與 A 的水平距離為 $a\sin\theta$。作用於 B 的水平力 R 的力矩為 $R\cdot 2a\cos\theta$，重量的力矩為 $Mg\cdot a\sin\theta$，轉向相反，因此

$$2aR\cos\theta = Mga\sin\theta \qquad\Longrightarrow\qquad R = \tfrac{1}{2}Mg\tan\theta.$$

沿垂直於斜面和平行於斜面的方向分解

想一想 應該沿哪些方向分解，才能令每條方程只含一個未知量？

沿垂直於斜面的方向和沿斜面的方向分解（resolve）。F 在垂直於斜面的方向沒有分量，N 在沿斜面的方向沒有分量。我們需要求出另外兩個力的分量。

- 重量 Mg 有壓向斜面的分量 $Mg\cos\phi$ 和沿斜面向下的分量 $Mg\sin\phi$。
- 斜面向着牆壁上升，所以它向上的法線朝遠離牆的一方傾斜，而水平力 R（同樣指向遠離牆的一方）沿該法線的分量為 $R\sin\phi$，即指向斜面之外。沿斜面方向，R 指向遠離牆的一方，亦即下坡方向，分量為 $R\cos\phi$。

垂直於斜面：

$$N + R\sin\phi = Mg\cos\phi,$$
$$\text{所以}\quad N = Mg\cos\phi - \tfrac{1}{2}Mg\tan\theta\sin\phi = Mg\left(\cos\phi - \frac{\tan\theta\sin\phi}{2}\right).$$

沿斜面（以沿斜面向上為正）：

$$F = Mg\sin\phi + R\cos\phi \quad\Longrightarrow\quad F = Mg\left(\sin\phi + \frac{\tan\theta\cos\phi}{2}\right).$$

這就是題目要求的兩個結果。

最大的角

梯腳不滑動的條件是：接觸得以維持，即 $N > 0$；以及摩擦力不超過其上限，即 $F \le \mu N$，其中 $\mu = 2$。（這裏 $F > 0$，所以這是唯一的摩擦條件。）當 $\phi = 45^\circ$ 時，$\sin\phi = \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$，記 $t = \tan\theta$，則

$$F = \frac{Mg}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{t}{2}\right), \qquad N = \frac{Mg}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{t}{2}\right).$$

所以 $N > 0$ 要求 $t < 2$，而 $F \le 2N$ 則變成

$$1 + \frac{t}{2} \le 2 - t \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{3t}{2} \le 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \tan\theta \le \frac{2}{3}.$$

這比 $t < 2$ 更嚴格，所以它才是真正起限制作用的條件。由於 $\tan\theta$ 在 $0 < \theta < 90^\circ$ 上遞增，梯子能夠保持平衡的最大角為

$$\theta = \arctan\tfrac{2}{3} \approx 33.7^\circ,$$

而在這個角度下，摩擦力達到極限值（limiting friction）。

驗算

- 當 $\phi = 0$（水平地面）時，公式給出 $N = Mg$ 和 $F = \frac{1}{2}Mg\tan\theta = R$，正是梯子置於水平地面時為人熟悉的結果。
- 當 $\theta = 0$（梯子鉛垂）時，牆不起任何作用，而 $N = Mg\cos\phi$，$F = Mg\sin\phi$，與質點靜止於斜面上的情況完全一樣。
- 數值上，對隨機選取的 θ 和 ϕ 直接解水平和鉛垂方向的力方程，所得結果與兩條公式吻合，誤差在 10^{-13} 以內；而當 $\phi = 45^\circ$ 時，比值 F/N 在 $\theta = 33.690^\circ$ 處剛好越過 2。

常見錯誤

- 弄錯 $R\sin\phi$ 一項的正負號。由於斜面向着牆壁上升，R 有一部分把梯腳拉離斜面，令 N 減小。
- 沿水平和鉛垂方向分解，然後在解所得的聯立方程時出錯。這個做法行得通，但沿斜面和垂直於斜面的方向分解要快得多。

STEP 之外

留意斜面越陡，梯子可以傾斜的程度就越小，因為牆的反作用力一方面令 N 減小，另一方面又令 F 增大。這類問題是靜力學（statics）的起點：我們選擇合適的坐標軸和取矩點，把各個未知量分離開來。同樣的想法也是分析桁架（trusses）和框架結構（frameworks）的基礎，更廣泛而言也是分析穩定性的基礎。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對剛體平衡和摩擦有嚴謹細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。