詳細解答

STEP I 1989，第 12 題

力學 • 彈性繩與能量

STEP I 1989，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/89-s1-q12

關鍵思路

一切都建基於正四面體（regular tetrahedron）的幾何：它的質心（centre of mass）與頂點、與面、以及與通過頂點的軸之間的距離各是多少。一旦求得這三個長度，第一部分只不過是虎克定律（Hooke's law）的應用。至於第二部分，對稱性確保運動是純粹的鉛垂平移。四面體開始和結束時都處於靜止，所以我們根本不需要運動方程（equation of motion）：只要考慮重力勢能與彈性勢能（elastic potential energy）之間的能量平衡，便可解決問題。

解答

四面體的幾何

我們把各桿視為均勻剛桿，把各弦線視為符合虎克定律的輕彈性弦線。每根桿的質量可視為集中在其中點。每個頂點恰好屬於六根桿中的三根，所以六個中點的平均等於四個頂點的平均。因此質心 G 就是四面體的形心（centroid）。

面 BCD 是邊長為 $2a$ 的等邊三角形，所以它的中心 N 與 B、C、D 每一點的距離都是

$$\rho = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

。四面體的高是 $AN = \sqrt{(2a)^2 - \rho^2} = \sqrt{\frac{8}{3}}\,a = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$。形心位於 AN 上，在由該面往上四分之一的位置。所以

$$GN = r = \frac{\sqrt{6}}{6}\,a, \qquad GA = GB = GC = GD = R = \frac{\sqrt{6}}{2}\,a.$$

（驗算：$R^2 = \rho^2 + r^2 = \frac{4}{3}a^2 + \frac{1}{6}a^2 = \frac{3}{2}a^2$。）

張力

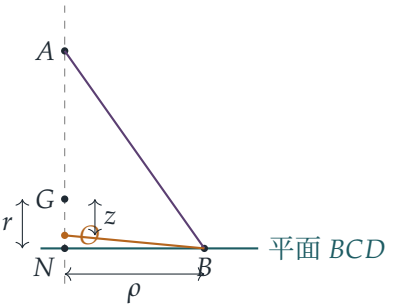
當 X 位於 G 時，每條弦線的長度為 $R = \frac{\sqrt{6}}{2}a$，伸長量（extension）為 $R - a = \frac{\sqrt{6}-2}{2}\,a > 0$，所以四條弦線全部拉緊。根據虎克定律，每條弦線的張力（tension）為

$$T = \frac{\lambda(R-a)}{a} = \frac{\sqrt{6}-2}{2}\,\lambda \approx 0.225\,\lambda.$$

XA 斷裂之後

斷裂之前，四個相等的張力沿着指向 G 的四個方向拉動各頂點。由於 G 是形心，由 G 指向各頂點的單位向量之和為零，所以各弦線不產生淨力，桌面承受全部重量 Mg。

當 XA 斷裂時，餘下三條弦線的合力大小為 T，方向鉛垂向上，即等於 XA 原有拉力的負值。在水平方向上，由於繞鉛垂線 AN 有三重對稱性，三個拉力互相抵銷。每個拉力都位於通過該線的鉛垂平面內，所以它們不產生扭轉力偶（couple），而它們的傾側力偶亦因對稱而互相抵銷。因此四面體的運動是純粹的鉛垂平移，AN 始終留在通過 O 的鉛垂線上。它之所以離開桌面，是因為 $T > Mg$，這一點我們會在最後確認。



設 z 為 G 高於 O 的高度。那麼 B 與通過 O 的鉛垂線的水平距離為 ρ，相對於 O 的高度為 $z - r$，所以三條弦線每條的長度都是

$$L(z) = \sqrt{\rho^2 + (z-r)^2}.$$

開始時 $z = 0$，而 $L = \sqrt{\rho^2 + r^2} = R$。在最高點，$BCD$ 與 O 同高，所以 $z = r$，而 $L = \rho = \frac{2}{\sqrt{3}}a$。當 $0 \le z \le r$ 時，L 一直介乎 ρ 與 R 之間，兩者都大於 a，所以弦線自始至終保持拉緊。

想一想 怎樣才可以不必解一條棘手的非線性運動方程，而求出最大高度？

桌面光滑，弦線為輕弦線，所以機械能（mechanical energy）守恆。由於四面體立即離開桌面，法向反作用力（normal reaction）不作功。四面體在開始時和在最高點時都處於靜止，所以動能不必考慮。三條弦線所失去的彈性能量 $3 \cdot \frac{\lambda(L-a)^2}{2a}$，必定等於所獲

得的重力勢能 Mgr：

$$Mg\,r = \frac{3\lambda}{2a}\Big[(R-a)^2-(\rho-a)^2\Big].$$

把方括號內的式子因式分解，並利用 $R^2-\rho^2 = \frac{3}{2}a^2-\frac{4}{3}a^2 = \frac{1}{6}a^2$，

$$\begin{aligned}(R-a)^2-(\rho-a)^2 &= R^2-\rho^2-2a(R-\rho)\\ &= a^2\Big(\tfrac{1}{6}-\sqrt{6}+\tfrac{4}{\sqrt{3}}\Big).\end{aligned}$$

由於 $\dfrac{3}{2ar} = \dfrac{3}{2a}\cdot\dfrac{6}{\sqrt{6}\,a} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2a^2}$，由此可得

$$\begin{aligned}\frac{Mg}{\lambda} &= \frac{3\sqrt{6}}{2}\Big(\tfrac{1}{6}-\sqrt{6}+\tfrac{4}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{\sqrt{6}}{4}-9+6\sqrt{2}\\ &\approx 0.6124-9+8.4853 = 0.0977,\end{aligned}$$

準確至 2 位有效數字即為 0.098，正如題目所求。

最後，$Mg \approx 0.098\lambda < 0.225\lambda \approx T$，所以剛斷裂後的向上淨力 $T-Mg$ 為正數，四面體確實會升離桌面，與題目所述一致。

驗算

- 取 $a=1$，我們以坐標表示四個頂點，確認全部六條棱的長度都是 2，四個頂點與形心的距離都是 $\frac{\sqrt{6}}{2}\approx 1.2247$，並重新得出 $T\approx 0.2247\lambda$。
- 取 $Mg/\lambda = 6\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{4}-9 \approx 0.09765$，我們由 $z=0$ 處的靜止狀態出發，以數值方法逐步計算運動方程 $M\ddot{z} = 3T(L)\,\frac{r-z}{L} - Mg$。速度首次回到零時 $z \approx 0.40825$，與 $r=\frac{\sqrt{6}}{6}$ 吻合。

常見錯誤

- 把 R 當作形心到面的距離。形心位於由頂點往下 $\frac{3}{4}$ 的位置，所以 $R=3r$。
- 忘記弦線在最高點時仍然處於拉伸狀態。每條弦線在該處的能量是 $\frac{\lambda(\rho-a)^2}{2a}$，而不是零。
- 計算伸長量 $L-a$ 時，把 L 取作由 O 到面的中心 N 的距離，而不是由 O 到頂點的距離。

STEP 之外

這裏所用的形心技巧（六根桿的中點的平均等於四個頂點的平均）是以下一般事實的一個小例子：一個系統的質心，是其各部分質心按質量加權的平均。把運動視為純粹平移，靠的是對稱性論證；這類論證在剛體動力學（rigid-body dynamics）中會變得有系統，因為物體的運動可分解為質心的平移和繞質心的轉動。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對這兩個想法都有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。