詳細解答

STEP I 1989，第 11 題

力學 • 拋體射程的最優化

> **STEP I 1989，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q11

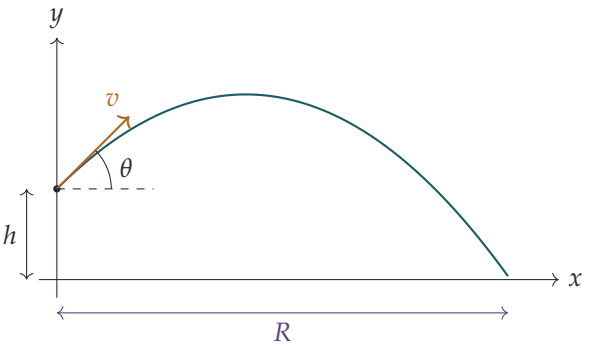
關鍵思路

飛行時間來自一條關於 t 的二次方程（quadratic equation）：鉛球的高度回到零時便落地。取正根，再乘以水平速率，便得到 R；餘下的工作只是把平方根整理成題目要求的形式。至於第二部分，「θ 稍為減小，R 會否增大？」其實是問 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\theta$ 在 $\theta = 45°$ 時的正負號，而對稱關係 $\sin 45° = \cos 45°$ 令這個導數（derivative）化簡得十分俐落。

解答

模型

我們把鉛球視為只受重力作用的質點（particle），從點 $(0, h)$ 以速率 v、與水平成仰角 θ 擲出，其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 及 $h > 0$。取 x 軸為水平方向並指向投擲的方向，y 軸由地面起豎直向上。



射程

經過時間 t 後，

$$x = vt\cos\theta, \qquad y = h + vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

鉛球在 $y = 0$ 時着地，即

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - (v\sin\theta)\,t - h = 0 \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{v\sin\theta \pm \sqrt{v^2\sin^2\theta + 2gh}}{g}.$$

由於 $h > 0$，兩根之積 $-2h/g$ 為負數，所以恰好有一個根是正數；取負號得到的是負根（即擲出之前的時刻），因此我們取正號。於是

$$\begin{aligned} R = v\cos\theta\; t &= \frac{v\cos\theta}{g}\left(v\sin\theta + \sqrt{v^2\sin^2\theta + 2gh}\right) \\ &= \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2\sin^2\theta}}\right) \qquad \text{（提出 } v\sin\theta > 0\text{）} \\ &= \frac{v^2}{2g}\sin 2\theta\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v^2\sin^2\theta}}\right), \end{aligned}$$

其中用到 $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$。這就是所要求的結果。

想一想 為甚麼可以把 $v\sin\theta$ 以 $v^2\sin^2\theta$ 的形式放進平方根之內？

因為 $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ 只在 $a \geq 0$ 時成立。這裏 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，所以 $v\sin\theta > 0$，這一步是成立的。（若是向下擲出，這一步便不成立，題目所給的公式也會出錯。）

45° 是最佳角度嗎？

求導時，用未化簡的形式較為方便。寫成

$$R(\theta) = \frac{v}{g}\cos\theta\,(v\sin\theta + S), \qquad S = \sqrt{v^2\sin^2\theta + 2gh},$$

於是 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{v^2\sin\theta\cos\theta}{S}$。由積法則（product rule），

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} = \frac{v}{g}\left[-\sin\theta\,(v\sin\theta + S) + \cos\theta\left(v\cos\theta + \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{S}\right)\right].$$

在 $\theta = 45°$ 時，設 $\sin\theta = \cos\theta = c = \frac{1}{\sqrt{2}}$。$-vc^2$ 與 $+vc^2$ 兩項互相抵銷，餘下

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=45°} &= \frac{vc}{g}\left(-S + \frac{v^2c^2}{S}\right) = \frac{vc}{gS}\left(v^2c^2 - S^2\right) \\ &= \frac{vc}{gS}\left(\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v^2 - 2gh\right) = -\frac{2vhc}{S} = -\frac{\sqrt{2}\,vh}{\sqrt{v^2 + 4gh}}, \end{aligned}$$

其中最後一步用到 $S = \sqrt{\frac{1}{2}v^2 + 2gh} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{v^2 + 4gh}$。

由於 $v > 0$ 及 $h > 0$，這個導數嚴格為負。所以在 45° 附近，R 是 θ 的嚴格遞減函數（strictly decreasing function），而當減幅 $\delta\theta > 0$ 足夠小時，便有 $R(45° - \delta\theta) \approx R(45°) + \frac{\sqrt{2}\,vh}{\sqrt{v^2+4gh}}\,\delta\theta > R(45°)$。**答案是會的：$\theta$ 稍為減小，R 便會增大。**

從物理角度看：鉛球從高處擲出，留在空中的時間比在平地上擲出時稍長，而這段額外的時間用來作水平移動更為划算，所以擲得平一點會有好處。只有當 $h = 0$ 時，導數才等於零，45° 才是最佳角度。

驗算

- 當 $h = 0$ 時，公式給出 $R = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$，即熟悉的平地射程，而在 45° 的導數為 0，正如所料。
- 單位：v^2/g 是長度，而 $2hg/v^2$ 是無量綱（dimensionless）的量。
- 數值上，取 $g = 9.8$、$v = 13\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 及 $h = 2\,\mathrm{m}$：$R(45°) \approx 19.05\,\mathrm{m}$，但 $R(40°) \approx 19.10\,\mathrm{m}$。把運動按時間逐步推算，所得結果與 R 的公式吻合；而對許多隨機選取的 v 和 h，在 45° 以有限差分（finite difference）計算的導數亦與 $-\sqrt{2}\,vh/\sqrt{v^2+4gh}$ 相符。

常見錯誤

- 解 t 的二次方程時取錯了根，或忘記說明為何捨去負根。
- 推論說「$\sin 2\theta$ 在 45° 時最大，所以 R 也是」。括號內的式子同樣取決於 θ（它隨 θ 增大而減小），所以這個論證並不完整。

STEP 之外

一般地令 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\theta = 0$，可證明從高度 h 擲出的最佳角度滿足 $\tan\theta = v/\sqrt{v^2 + 2gh}$，這個角度略小於 45°（以上述數值計算約為 42°）；現實中的鉛球運動員出手角度還要更低，因為角度較平時他們可以推得更用力。像這樣對一族軌跡求最優，便會引出這族曲線的*包絡線*（envelope），即「安全拋物線」（parabola of safety），它劃出了鉛球所能到達的每一點。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）對拋體運動（projectile motion）及其各種變化有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。