詳細解答

STEP I 1989，第 10 題

力學 • 與速度相關的阻力

> **STEP I 1989，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q10

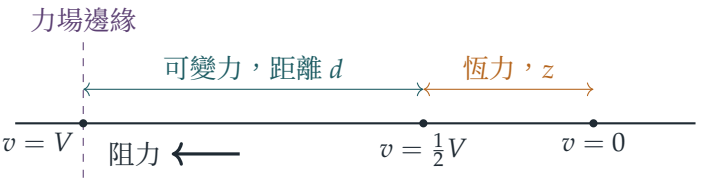
關鍵思路

阻力取決於速率 v，而非時間，而我們要求的是距離。這正是提示我們把加速度（acceleration）寫成 $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 的信號：這樣一來，牛頓第二定律（Newton's second law）便化為一條直接聯繫 v 與 x 的可分離變數方程（separable equation）。第二部分是勻減速問題，所以唯一要做的，就是求出轉變一刻的力，再讓它在 $\pm 10\%$ 的範圍內變動。

解答

模型

我們把太空船視為質量為 M、沿直線運動的質點（particle）。設 x 為進入力場後所行的距離，v 為速率，且在 $x = 0$ 時 $v = V$。唯一的力是阻力（resistance），其方向向後，因此速率一直遞減。



速率減半所需的距離

取運動方向為正，並把加速度寫成 $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，由牛頓第二定律得

$$M v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{M\omega\,(v^2 + V^2)}{v} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{v^2}{v^2 + V^2}\,\mathrm{d}v = -\omega\,\mathrm{d}x.$$

想一想 怎樣求 $\dfrac{v^2}{v^2+V^2}$ 的積分？

把分子寫成 $(v^2+V^2)-V^2$，於是

$$\frac{v^2}{v^2+V^2} = 1 - \frac{V^2}{v^2+V^2}, \qquad \int \frac{v^2}{v^2+V^2}\,\mathrm{d}v = v - V\arctan\frac{v}{V} + C,$$

這裏用了標準積分（standard integral）$\int \frac{\mathrm{d}v}{v^2+V^2} = \frac{1}{V}\arctan\frac{v}{V}$。

設 d 為速率降至 $\frac{1}{2}V$ 時所行的距離。由 $(x,v)=(0,V)$ 積分至 $(d,\frac{1}{2}V)$，

$$\begin{aligned}\omega d &= \int_{V/2}^{V} \frac{v^2}{v^2+V^2}\,\mathrm{d}v = \Big[v - V\arctan\frac{v}{V}\Big]_{V/2}^{V} \\ &= \frac{V}{2} - V\Big(\arctan 1 - \arctan\tfrac{1}{2}\Big) = V\Big(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{1}{2}\Big).\end{aligned}$$

因此所求的距離為

$$d = \frac{V}{\omega}\Big(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{1}{2}\Big) = \frac{V}{\omega}\Big(\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{3}\Big) \approx 0.178\,\frac{V}{\omega}.$$

第二個形式用了 $\arctan 1 - \arctan\frac{1}{2} = \arctan\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \arctan\frac{1}{3}$，這來自正切的差角公式（tangent subtraction formula）（兩個角都在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 之內，所以沒有歧義）。兩個形式都是完整的答案。

恆力

在轉變前的一刻，$v=\frac{1}{2}V$，所以阻力的大小為

$$\frac{M\omega(\frac{1}{4}V^2+V^2)}{\frac{1}{2}V} = \frac{5}{2}M\omega V.$$

新的恆力 F 與此值相差不超過 10%，所以

$$\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{2}M\omega V \le F \le \frac{11}{10}\cdot\frac{5}{2}M\omega V, \qquad \text{即} \qquad \frac{9}{4}M\omega V \le F \le \frac{11}{4}M\omega V.$$

在恆力作用下，減速度（deceleration）$a = F/M$ 是常數，所以由 $v^2 = u^2 - 2as$，取 $u=\frac{1}{2}V$ 及末速率為 0，得

$$z = \frac{(V/2)^2}{2a} = \frac{MV^2}{8F}.$$

這個量隨 F 增大而減小，所以最大的力對應最小的 z，反之亦然：

$$\frac{MV^2}{8\cdot\frac{11}{4}M\omega V} \le z \le \frac{MV^2}{8\cdot\frac{9}{4}M\omega V}, \qquad \text{亦即} \qquad \boxed{\frac{V}{22\,\omega} \le z \le \frac{V}{18\,\omega}}$$

（若把「相差不超過 10%」理解為嚴格的範圍，則不等式為嚴格不等式）。假如力完全不變，則 $z = V/(20\omega)$，位於這個範圍的中間。

驗算

- 量綱（dimensions）：ω 的單位是 s^{-1}（因為 $M\omega v$ 必須是力），所以 V/ω 是長度，正如兩個答案所要求的。
- 係數 $\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{3} \approx 0.1782$ 是正數，且小於 $\frac{1}{2}$。這是應該的：太空船的速率介乎 $\frac{1}{2}V$ 與 V 之間，而減速度至少為 $2\omega V$，所以這段行程最多歷時 $1/(4\omega)$，所行距離小於 $V/(4\omega)$。
- 取 $V = \omega = 1$，以數值方法逐步計算 $\dot{v} = -\omega(v^2 + V^2)/v$，得出 $v = \frac{1}{2}$ 時的距離為 0.17825；再逐步計算恆力階段，當力為原來的 110%、100% 及 90% 時，分別得 $z = 0.0455$、0.0500、0.0556，與 $\frac{1}{22}, \frac{1}{20}, \frac{1}{18}$ 吻合。

常見錯誤

- 用了 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 而不是 $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$：這樣求得的是時間而不是距離，其後還要多做一次積分。
- 把上下限配反了：力愈大，停下來所需的距離愈短，所以 1.1 倍的力對應的是下限 $V/(22\omega)$。

STEP 之外

寫出 $a = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$，是初次窺見一個更宏大的想法：對於只取決於位置或速率的一維力，我們可以用另一個變數取代時間，從而降低方程的階（order）；而當力只取決於位置時，這就引出能量守恆（energy conservation）以及描述運動的相平面（phase plane）圖像。第二部分是一道關於*敏感度*（sensitivity）的小練習：數據中的不確定性（這裏是力的 $\pm 10\%$）怎樣傳遞到答案之中（z 大約相差 $\mp 10\%$）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）正是以這種精神處理與速度有關的力。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。