詳細解答

STEP I 1989，第 1 題

純數學 • 組合區域的面積

> **STEP I 1989，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q1

關鍵思路

這個區域由半圓（semicircle）組成。先取一個大的半圓盤（half-disc），再減去和加上較小的半圓盤，就可以得到它。所以我們只需要知道每個半徑，尤其是下方半圓 CDE 的半徑，而這可以由直線 AG 上的各段長度求得。把半圓換成拋物線（parabola），方法完全不變，因為拋物線拱（parabolic arch）有一條簡單的面積公式，可以取代 $\frac{1}{2}\pi a^2$ 的角色。

解答

半圓

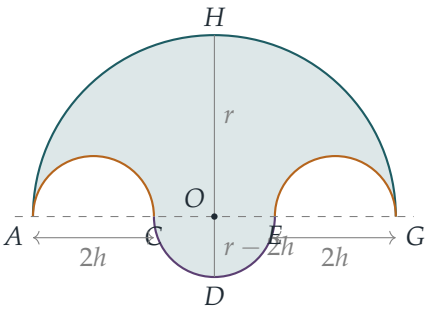
從 A 起沿直線量度。由於 ABC 的半徑是 h，所以 $AC = 2h$。同理 $EG = 2h$，而 $AG = 2r$，因為 AHG 的半徑是 r。於是

$$CE = 2r - 4h,$$

由於 $2h < r$，這個值是正數。所以半圓 CDE 的半徑是 $r - 2h$。它的圓心是 CE 的中點，而根據對稱性，這也是 AG 的中點，所以它與大半圓有共同的圓心 O。

從圖中可見，ABC 和 EFG 與 H 位於 AG 的同一側，並且在大半圓之內，而 CDE 則位於另一側。因此所圍成的區域是

$$(\text{半圓盤}AHG) \ - \ (\text{半圓盤}ABC \text{ 和}EFG) \ + \ (\text{半圓盤}CDE).$$



半徑為 a 的半圓盤面積是 $\frac{1}{2}\pi a^2$，所以所圍成的面積是

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\pi r^2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}\pi h^2 + \tfrac{1}{2}\pi(r-2h)^2 &= \tfrac{1}{2}\pi(r^2 - 2h^2 + r^2 - 4rh + 4h^2)\\ &= \tfrac{1}{2}\pi(2r^2 - 4rh + 2h^2)\\ &= \pi(r-h)^2.\end{aligned}$$

？ 想一想 HD 有多長？

點 H 是大半圓的最高點，所以它位於通過 O 而垂直於 AG 的直線上，與 O 相距 r。點 D 是 CDE 的最低點，所以它也在同一條垂直線上，位於直線的另一側，與 O 相距 $r-2h$。所以

$$HD = r + (r-2h) = 2(r-h),$$

而以 HD 為直徑的圓，半徑是 $r-h$，面積是 $\pi(r-h)^2$。這正是我們求得的面積，符合題目要求。

拋物線

每個半徑為 a 的半圓，都換成一個拋物線拱：它建在同一條長度為 $2a$ 的弦（chord）上，頂點（vertex）在弦的中點上方，高度為 a。把原點設在弦的中點。拋物線關於通過頂點的軸對稱，所以它的形式是 $y = a - kx^2$。它通過 $(\pm a, 0)$，所以 $k = 1/a$。拱與弦之間的面積是

$$\int_{-a}^{a}\left(a - \frac{x^2}{a}\right)\mathrm{d}x = 2a^2 - \frac{2a^3}{3a} = \frac{4a^2}{3}.$$

（這就是阿基米德（Archimedes）的結果：外接矩形面積的三分之二，即 $\frac{2}{3}\cdot 2a\cdot a$。）

每個拱仍然位於 AG 的同一側，與原來的半圓一樣。我們還應該檢查每個小拱是否仍然在大拱之下。兩個拱都從 A 出發，斜率（gradient）同為 2，所以在 A 附近這一點並不明顯。在距離 A 為 x 之處，其中 $0 \le x \le 2h$，大拱的高度是 $x(2r-x)/r$，而拱 ABC 的高度是 $x(2h-x)/h$。兩者之差是

$$\frac{x(2r-x)}{r} - \frac{x(2h-x)}{h} = x^2\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{r}\right) \ge 0,$$

所以 ABC 確實在 AHG 之內，而根據對稱性，EFG 也是如此。因此同樣的加減分解依然適用，只需以 $\frac{4}{3}a^2$ 代替 $\frac{1}{2}\pi a^2$：

$$\begin{aligned}\tfrac{4}{3}r^2 - 2\cdot\tfrac{4}{3}h^2 + \tfrac{4}{3}(r-2h)^2 &= \tfrac{4}{3}(2r^2 - 4rh + 2h^2)\\ &= \tfrac{8}{3}(r-h)^2.\end{aligned}$$

所以換成拋物線後，所圍成的面積是 $\frac{8}{3}(r-h)^2$。

驗算

- 兩個答案都是一個常數乘以 $(r-h)^2$。這是必然的，因為兩個計算的結構完全相同：只有單個拱的係數改變了，由 $\frac{\pi}{2}$ 變成 $\frac{4}{3}$。比值 $\frac{8/3}{\pi} \approx 0.849$ 小於 1，這是合理的，因為弦和高度都相同的拋物線拱位於半圓之內。
- 極限情況 $h \to 0$：小拱消失，而 CDE 變成一個半徑為 r 的完整下半圓，合起來是一個面積為 πr^2 的完整圓盤。公式 $\pi(r-h)^2$ 與此吻合。
- 數值上，取 $r = 3$ 和 $h = 1$（即試卷圖中的比例），面積分別是 $4\pi \approx 12.566$ 和 $\frac{32}{3} \approx 10.667$。對描出的邊界以鞋帶公式（shoelace formula）計算，取八組隨機的 (r,h)，結果與兩條公式都吻合，誤差在離散化誤差範圍之內。

常見錯誤

- 把 CDE 的半徑當作 $r-h$ 或 $r-4h$。把 AG 上的各段長度畫出來：$CE = 2r - 4h$，所以它的半徑是 $r-2h$。
- 把上方的小半圓加上去，而不是減去。它們是從大半圓盤中切走的部分，所以其面積要減掉。

STEP 之外

第一部分的圖形是*鞋匠刀形*（arbelos，即「鞋匠的刀」），是阿基米德研究過的一種形狀。它的經典形式是一個大半圓，內有兩個較小的半圓，而它的面積同樣等於以某條精心選取的弦為直徑的圓的面積。阿基米德還發現了拋物線弓形的 $\frac{2}{3}$ 法則，所用的極限論證已經很接近積分。在大學裏，從他的「窮竭法」（method of exhaustion）走到黎曼積分（Riemann integral）的那一步，是第一門分析課程的核心內容。想了解這一步，Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析學入門教材）是很好的選擇。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。