詳細解答

STEP III 1988，第 8 題

純數學 • 拋物線的切線與法線

> **STEP III 1988，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q8

關鍵思路

把每一條直線都用參數（parameter）t 表示，求出各對直線的交點，再把這些頂點代入行列式（determinant）。這些行列式看來很繁複，但它們對 t_1, t_2, t_3 是反對稱（antisymmetric）的，所以每一個都必定是 $(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)$ 的倍數。只要用簡單的行運算和列運算（row and column operations），就可以把這個因子提出來，餘下的就是兩個面積之間的比較。

（印刷的題目要求的是 A_3；這是 A_2 的誤印，即法線三角形的面積。）

解答

切線與法線

沿着 $x = at^2, y = 2at$ 把 $y^2 = 4ax$ 對 t 求導，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$。在 $(at^2, 2at)$ 的切線（tangent）是 $y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2)$，即

$$ty = x + at^2.$$

這個形式在 $t = 0$ 時也成立（在頂點的切線是 $x = 0$）。法線（normal）的斜率（gradient）是 $-t$：

$$y + tx = 2at + at^3.$$

我們全程假設 $a \neq 0$。

切線三角形

把在 t_i 和 t_j 的切線方程相減，得 $(t_i - t_j)y = a(t_i^2 - t_j^2)$。由於 $t_i \neq t_j$，我們可以相除，所以 $y = a(t_i + t_j)$，於是 $x = t_i y - a t_i^2 = a t_i t_j$。因此

$$\text{在}t_i, t_j \text{ 的兩條切線相交於}(at_it_j,\ a(t_i + t_j)).$$

各切線的斜率 $1/t_i$ 互不相同（或者其中一條是鉛垂的），所以沒有兩條是平行的，三角形確實存在。記 $s = t_1 + t_2 + t_3$。與 P_1 相對的頂點是 $(at_2t_3,\ a(s - t_1))$，其餘兩個頂點類似。從首兩列各提出因子 a，然後把第 3 列的 $-s$ 倍加到第 2 列，再把第 2 列變號，

$$\det\begin{pmatrix} at_2t_3 & a(s-t_1) & 1 \\ at_1t_3 & a(s-t_2) & 1 \\ at_1t_2 & a(s-t_3) & 1 \end{pmatrix} = -a^2 \det\begin{pmatrix} t_2t_3 & t_1 & 1 \\ t_1t_3 & t_2 & 1 \\ t_1t_2 & t_3 & 1 \end{pmatrix} = a^2 D,$$

當中我們對調了首兩列，並設

$$D = \det\begin{pmatrix} t_1 & t_2t_3 & 1 \\ t_2 & t_1t_3 & 1 \\ t_3 & t_1t_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

要計算 D，把第 1 行換成第 1 行 − 第 2 行，把第 2 行換成第 2 行 − 第 3 行。第 1 行變成 $(t_1 - t_2,\ t_3(t_2 - t_1),\ 0) = (t_1 - t_2)(1,\ -t_3,\ 0)$，而第 2 行變成 $(t_2 - t_3)(1,\ -t_1,\ 0)$。沿最後一列展開，

$$D = (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)\det\begin{pmatrix} 1 & -t_3 \\ 1 & -t_1 \end{pmatrix} = (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1).$$

因此

$$A_1 = \tfrac{1}{2}a^2\,|(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)|,$$

由於各 t_i 互不相同，這個面積不等於零。

法線三角形

把在 t_i 和 t_j 的法線方程相減，得 $(t_i - t_j)x = 2a(t_i - t_j) + a(t_i^3 - t_j^3)$，所以除以 $t_i - t_j \neq 0$ 後，

$$x = 2a + a(t_i^2 + t_it_j + t_j^2), \qquad y = 2at_i + at_i^3 - t_ix = -at_it_j(t_i + t_j).$$

各法線的斜率 $-t_i$ 互不相同，所以同樣地每一對法線都相交。對於與 P_1 相對的頂點，利用 $t_2 + t_3 = s - t_1$，並記 $e_1 = t_2t_3$（以及 $e_2 = t_1t_3, e_3 = t_1t_2$）。那麼

$$t_2^2 + t_2t_3 + t_3^2 = (t_2 + t_3)^2 - t_2t_3 = (s - t_1)^2 - e_1, \qquad -t_2t_3(t_2 + t_3) = -se_1 + p,$$

其中 $p = t_1t_2t_3$。所以這個頂點是 $a(2 + (s - t_1)^2 - e_1,\ -se_1 + p)$，其餘兩個頂點類似。現在提出 a^2，並進行不改變行列式的值的列運算：從第 1 列減去第 3 列的 2 倍，從第 2 列減去第 3 列的 p 倍，然後從第 2 列提出因子 $-s$：

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2}\det(\text{法線三角形的頂點}) &= \det\begin{pmatrix}(s-t_i)^2 - e_i & -se_i & 1\end{pmatrix}_{i=1,2,3}\\ &= -s\det\begin{pmatrix}(s-t_i)^2 - e_i & e_i & 1\end{pmatrix}_{i=1,2,3},\end{aligned}$$

當中每個式子只顯示有代表性的第 i 行。接着把第 2 列加到第 1 列，這樣就消去了 $-e_i$，再展開 $(s - t_i)^2 = s^2 - 2st_i + t_i^2$。當中的 s^2 是第 3 列的倍數，可以消去，而行列式對第 1 列是線性的：

$$\det\begin{pmatrix}t_i^2 - 2st_i & e_i & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}t_i^2 & e_i & 1\end{pmatrix} - 2s\det\begin{pmatrix}t_i & e_i & 1\end{pmatrix} = E - 2sD,$$

這裏我們如此記這兩個行列式。第二個行列式正好就是 D。

想一想 我們怎樣計算 E，即各行為 $(t_i^2,\ e_i,\ 1)$ 的行列式？

使用與計算 D 時相同的行運算。第 1 行 − 第 2 行是 $(t_1^2 - t_2^2,\ t_3(t_2 - t_1),\ 0) = (t_1 - t_2)(t_1 + t_2,\ -t_3,\ 0)$，而第 2 行 − 第 3 行是 $(t_2 - t_3)(t_2 + t_3,\ -t_1,\ 0)$。所以

$$\begin{aligned}E &= (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)[-t_1(t_1 + t_2) + t_3(t_2 + t_3)]\\ &= (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)[(t_3^2 - t_1^2) + t_2(t_3 - t_1)]\\ &= (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)(t_1 + t_2 + t_3) = sD.\end{aligned}$$

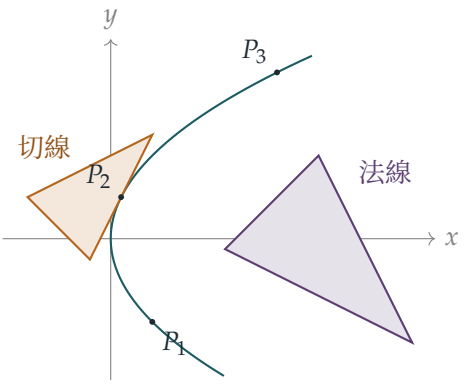
把以上各步合起來，

$$\det(\text{法線三角形的頂點}) = a^2 \cdot (-s)\,(sD - 2sD) = a^2s^2D.$$

取絕對值的一半，並與 $A_1 = \frac{1}{2}a^2|D|$ 比較，

$$A_2 = (t_1 + t_2 + t_3)^2 A_1,$$

這就是所求的結果。



圖中取 $a = 1$ 及 $t_1, t_2, t_3 = -1, \frac{1}{2}, 2$，所以 $s = \frac{3}{2}$。切線三角形（琥珀色）的面積是 $\frac{27}{8}$，而法線三角形（紫紅色）的面積是 $\frac{243}{32} = (\frac{3}{2})^2 \cdot \frac{27}{8}$。

法線何時共點？

沒有兩條法線是平行的，所以它們兩兩相交於三點 Q_{12}, Q_{13}, Q_{23}。如果三條法線共點（concurrent），這三點就會重合，三角形的面積為零。反過來，假設面積為零但三點並非全部相同，例如 $Q_{12} \neq Q_{13}$。這兩點都在 P_1 的法線上，所以通過它們的直線就是該法線。由於三點共線（collinear），Q_{23} 也在 P_1 的法線上。於是 Q_{23} 同時在三條法線上，所以 $Q_{23} = Q_{12}$（在 P_1 和 P_2 的兩條法線的唯一公共點），同理 $Q_{23} = Q_{13}$，這就產生矛盾。所以

$$\text{三條法線共點} \iff A_2 = 0 \iff (t_1 + t_2 + t_3)^2 A_1 = 0 \iff t_1 + t_2 + t_3 = 0,$$

這裏用到 $A_1 \neq 0$，因為各 t_i 互不相同。所求的條件是 $t_1 + t_2 + t_3 = 0$。

驗算

- 取 $t_1, t_2, t_3 = 0, 1, 2$ 及 $a = 1$，切線三角形的頂點是 $(2, 3)$、$(0, 2)$、$(0, 1)$，面積為 1，而 $\frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2}|(-1)(-1)(2)| = 1$。
- 在 $t = 1, 2, -3$（總和為零，$a = 1$）的法線全部通過 $(9, -6)$。例如，在 $t = 1$ 的法線是 $y + x = 3$。
- 我們用電腦以分數作精確計算，對大約 2,800 組隨機選取的 a 和互不相同的 t_i 求出各頂點，每一次都確認了 $A_2 = (t_1 + t_2 + t_3)^2 A_1$。

常見錯誤

- 忘記說明三條直線確實構成一個三角形。我們需要的是兩兩不平行，而這裏可由斜率互不相同得出。
- 未加理由就從 $A_2 = 0$ 斷定法線共點。面積為零只說明三個交點共線，上面那段簡短的論證才把它提升為「相同」。
- 把 3×3 行列式完全展開。這樣做是可行的，但幾乎肯定會出現正負號錯誤。應先用行運算提出因子 $(t_i - t_j)$。

STEP 之外

因子 $(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)$ 是一個范德蒙行列式（Vandermonde determinant），而 $E = sD$ 中的餘因子 $t_1 + t_2 + t_3$ 是一個對稱多項式（symmetric polynomial）。任何反對稱多項式都是范德蒙乘積乘以一個對稱多項式，這個事實在行列式和對稱函數的理論中會再次出現。法線三角形與拋物線的漸屈線（evolute）有關，漸屈線是拋物線的曲率中心（centres of curvature）所描出的曲線，也就是各法線的包絡線（envelope）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）對行列式及其行運算有很好的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。