詳細解答

STEP III 1988，第 6 題

純數學 • 逐次微分

> **STEP III 1988，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q6

關鍵思路

直接把一個乘積求導 1988 次是行不通的，但正弦與餘弦的乘積可以改寫成一個和。這樣每一項 $\sin kx$ 的導數（derivative）便以四步為一個循環，每求導一次就多出一個因子 k。至於零點（zero），$\sin 3x$ 前面那個龐大的因子 3^{1988} 意味着導數只可能在 $\sin 3x$ 幾乎為零的地方等於零，所以我們只需看 $\sin 3x$ 第一個零點稍後的位置，然後作線性化（linearise）。

解答

第 1988 階導數

由積化和差公式（product-to-sum formula）$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$，

$$\mathrm{f}(x) = \sin 2x \cos x = \tfrac{1}{2}\left(\sin 3x + \sin x\right).$$

把 $\sin kx$ 求導四次，得

$$\sin kx \;\to\; k\cos kx \;\to\; -k^2 \sin kx \;\to\; -k^3 \cos kx \;\to\; k^4 \sin kx,$$

所以每求導四次，效果只是把 $\sin kx$ 乘以 k^4。（等價地說，$\sin kx$ 的第 n 階導數是 $k^n \sin\left(kx + \tfrac{1}{2}n\pi\right)$。）由於 $1988 = 4 \times 497$，

$$\mathrm{f}^{(1988)}(x) = \tfrac{1}{2}\left(3^{1988}\sin 3x + \sin x\right).$$

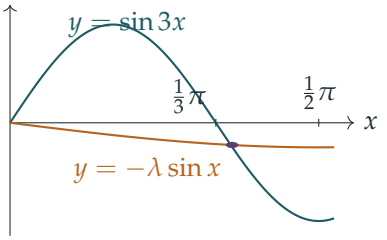
最小的正零點

我們要找出滿足下式的最小 $x > 0$：

$$3^{1988} \sin 3x + \sin x = 0. \qquad (*)$$

在 $(0, \frac{1}{3}\pi]$ 內沒有零點。當 $0 < x < \frac{1}{3}\pi$ 時，$0 < 3x < \pi$，所以 $\sin 3x$ 和 $\sin x$ 都是正數，$(*)$ 的左邊為正。在 $x = \frac{1}{3}\pi$ 處，左邊等於 $0 + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$。

緊接 $\frac{1}{3}\pi$ 之後有一個零點。在 $x = \frac{1}{2}\pi$ 處，左邊是 $3^{1988} \sin \frac{3}{2}\pi + 1 = 1 - 3^{1988} < 0$。左邊是連續（continuous）的，所以由介值定理（intermediate value theorem），在 $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 內必有零點，而最小的正零點就是其中的第一個。把它寫成 $x = \frac{1}{3}\pi + \epsilon$，其中 $0 < \epsilon < \frac{1}{6}\pi$。



草圖把 $(*)$ 表示為 $\sin 3x = -\lambda \sin x$，其中 $\lambda = 3^{-1988}$（圖中畫得遠比實際大）。兩條曲線首次相交之處，就在 $\sin 3x$ 於 $\frac{1}{3}\pi$ 穿過零之後不遠；對於真正的、極其微小的 λ，交點幾乎被推到 $\frac{1}{3}\pi$ 上。

由於 $\sin(\pi + 3\epsilon) = -\sin 3\epsilon$，方程 $(*)$ 變成

$$3^{1988} \sin 3\epsilon = \sin\left(\tfrac{1}{3}\pi + \epsilon\right). \qquad (**)$$

想一想 我們怎樣知道 ϵ 小得足以使用 $\sin 3\epsilon \approx 3\epsilon$？

$(**)$ 的右邊最多是 1，所以 $\sin 3\epsilon \le 3^{-1988}$。由於 $0 < 3\epsilon < \frac{1}{2}\pi$，而在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上有 $\sin t \ge \frac{2t}{\pi}$（正弦曲線在該區間內位於其弦（chord）的上方），我們得到 $3\epsilon \le \frac{\pi}{2} 3^{-1988}$。所以 ϵ 小得難以想像，這就說明了以下的近似是合理的。

ϵ 既然這樣小，便有 $\sin 3\epsilon = 3\epsilon\,(1 + O(\epsilon^2))$ 和 $\sin(\frac{1}{3}\pi + \epsilon) = \frac{\sqrt{3}}{2} + O(\epsilon)$。代入 $(**)$，

$$3^{1989}\epsilon \approx \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{所以} \qquad \epsilon \approx \frac{3^{-1989}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^{-1988}\sqrt{3}}{2},$$

其相對誤差（relative error）的階為 3^{-1988}。

關於試卷上印出的數值。 試卷要求證明 $\epsilon \approx \frac{1}{2}3^{-1988}\sqrt{3}$，這是此處所得數值的三倍。因子 3 來自 $\sin 3\epsilon \approx 3\epsilon$，而下面的數值驗算也確認答案是 3^{-1989}，而不是 3^{-1988}。所以題目看來有一處筆誤：它原意要用的方法正是上面的方法，只是 3 的冪次差了一。如果你得到的是 3^{-1989}，請相信自己的計算。

驗算

- 同樣的論證適用於任何 4 的倍數 n：$3^n \sin 3x + \sin x$ 的第一個正零點位於 $\frac{1}{3}\pi + \epsilon_n$，其中 $\epsilon_n \approx \frac{1}{2}3^{-(n+1)}\sqrt{3}$。當 $n = 4$ 時，數值求解得 $\epsilon_4 = 3.5713 \times 10^{-3}$，而預測值是 $\frac{1}{2}\sqrt{3}/3^5 = 3.5640 \times 10^{-3}$（比值為 1.0021）。當 $n = 8$ 時，比值是 1.000025；到了 $n = 40$ 及以上，比值在機器精度內等於 1。它與 $\frac{1}{2}\sqrt{3}/3^n$ 的比值則趨向 $\frac{1}{3}$。
- 導數公式可以用最初幾個情況來檢驗：$\mathrm{f}^{(4)}(x) = \frac{1}{2}(81\sin 3x + \sin x)$，你可以把 $\frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x)$ 求導四次來確認。

常見錯誤

- 弄錯正負號或相位：只有在求導次數是四的倍數之後，$\sin kx$ 才會回到 $+k^n \sin kx$。
- 忘記排除 $(0, \frac{1}{3}\pi)$ 內的零點；正是那裏的正負號論證，才使 $\frac{1}{3}\pi + \epsilon$ 成為最小的正零點。
- 寫成 $\sin(\pi + 3\epsilon) \approx \epsilon$ 而不是 -3ϵ，漏掉了正負號或因子 3。

STEP 之外

第二部分是攝動理論（perturbation theory）的一個簡單例子：一個很大的參數迫使解非常貼近某個已知的根，而在該根附近作線性化便得出首項修正，誤差的大小則由泰勒級數（Taylor series）的下一項控制。利用 $O(\cdot)$ 記號和誤差界，把「近似等於」說得精確，是大學第一門分析課程的核心主題；參見 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。