詳細解答

STEP III 1988，第 5 題

純數學 • 遞推關係與貸款

STEP III 1988，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/88-s3-q5

關鍵思路

先寫下債務在一天之內的變化。每天債務先乘以 $1+k$（利息），然後加上（挖掘成本）或減去（收入）一個固定金額。形如 $S_n = (1+k)S_{n-1} +$ 常數 的遞推關係（recurrence）逐層展開後，就是一個等比級數（geometric series）。最後一部分則歸結為一個比較：隧道通車那一刻，每日收入是否多於債務的利息？

解答

挖掘隧道期間的債務

利率為 $100k\%$，即 £S 的債務每天的利息是 £kS。設 S_n 為第 n 天結束時的債務（以英鎊計），其中 $S_0 = 0$。在第 $n \le T$ 天結束時，公司要借入 c 支付挖掘費用，另借入 kS_{n-1} 支付利息，所以

$$S_n = S_{n-1} + kS_{n-1} + c = (1+k)S_{n-1} + c.$$

由 $S_0 = 0$ 開始，反覆運用這個關係，

$$\begin{aligned} S_n &= c + (1+k)S_{n-1} \\ &= c + c(1+k) + (1+k)^2 S_{n-2} \\ &= \cdots = c[1 + (1+k) + (1+k)^2 + \cdots + (1+k)^{n-1}]. \end{aligned}$$

這是一個共有 n 項、公比（common ratio）為 $1+k \neq 1$（因為 $k > 0$）的等比級數，所以

$$S_n = \frac{c[(1+k)^n - 1]}{k}, \qquad n \le T,$$

正是所求的結果。（為嚴謹起見，可用歸納法（induction）驗證：公式給出 $S_0 = 0$；若公式對 S_{n-1} 成立，則 $(1+k)S_{n-1} + c = \frac{c}{k}[(1+k)^n - (1+k) + k]$，這正是 S_n 的公式。）

隧道通車後的債務

由第 $T+1$ 天起，不再需要挖掘。每天債務增加利息 kS，而公司還款 d，所以只要債務仍然是正數，就有

$$S_{T+j} = (1+k)S_{T+j-1} - d.$$

這與之前的遞推關係相同，只是 c 換成了 $-d$，而且現在是由 S_T 而不是由 0 開始。展開 m 次，

$$\begin{aligned} S_{T+m} &= (1+k)^m S_T - d[1 + (1+k) + \cdots + (1+k)^{m-1}] \\ &= (1+k)^m S_T - \frac{d[(1+k)^m - 1]}{k}. \end{aligned}$$

代入第一部分求得的 S_T，

$$S_{T+m} = \frac{c[(1+k)^T - 1](1+k)^m - d[(1+k)^m - 1]}{k}.$$

我們需要 $S_{T+m} > 0$，因為這個遞推關係只在債務尚未還清時適用。到了還清債務的那一天，公司只需償還所欠的餘額，而不是整筆 d。

債務何時還清

把含 $(1+k)^m$ 的項合併：

$$S_{T+m} = \frac{d}{k} - \frac{(1+k)^m}{k}\Big(d - c[(1+k)^T - 1]\Big).$$

想一想 從金錢的角度看，條件 $d/c > (1+k)^T - 1$ 究竟是甚麼意思？

把它乘以 c：條件變成 $d > c[(1+k)^T - 1] = kS_T$。換句話說，第一天的收入多於隧道通車時債務的利息。因此債務在第 $T+1$ 天下降，利息亦隨之減少，於是債務下降得愈來愈快。以下的代數運算把這個想法嚴格地表達出來。

假設 $d > c[(1+k)^T - 1]$，並記 $\delta = d - c[(1+k)^T - 1] > 0$。那麼

$$S_{T+m} = \frac{d - \delta(1+k)^m}{k}.$$

由於 $1+k > 1$，當 $m \to \infty$ 時 $(1+k)^m \to \infty$，所以 $\delta(1+k)^m$ 終會超過 d。這條公式只在債務為正數時成立，因此不可能永遠成立：必定有第一天，餘下的債務加上當天的利息不超過 d，公司就在那一天把債務還清。事實上，債務在第 $T+m$ 天還清，其中 m 是滿足下式的最小值：

$$(1+k)^m \geq \frac{d}{\delta}, \qquad \text{即} \qquad m \geq \frac{\ln(d/\delta)}{\ln(1+k)}.$$

所以，若 $d/c > (1+k)^T - 1$，公司最終能還清債務，正是所求的結果。

這個條件也是必要的。若 $d \le kS_T$，則 $\delta \le 0$；又因為 $S_T = (d-\delta)/k$，

$$S_{T+m} - S_T = \frac{-\delta[(1+k)^m - 1]}{k} \ge 0$$

對所有 m 都成立。債務永遠不會低於 S_T，所以永遠無法還清。

驗算

- 代入 $n=1$：$S_1 = c$。這是對的，因為第 1 天並無欠款，所以無須支付利息。
- 在 S_{T+m} 的公式中代入 $m=0$：得出 S_T，與預期相符。
- 若剛好有 $d = kS_T$，則 $\delta = 0$，而且對所有 m 都有 $S_{T+m} = d/k = S_T$：收入僅僅足夠支付利息，債務始終不變。這是臨界情況。
- 取 $c=100$、$k=0.01$、$T=30$ 逐日模擬，得出 $S_T \approx 3478.49$，與公式吻合。門檻是 $d > 34.78$。取 $d=50$ 時，債務在 $m=120$ 天後還清，與 $\ln(50/15.22)/\ln 1.01 \approx 119.6$ 相符。

常見錯誤

- 在第 1 天就計算利息，或者把級數數成 $n+1$ 項。由於 $S_0 = 0$，第一天的成本剛好是 c。
- 忘記第 T 天之後級數是由 S_T 而不是由 0 開始：$(1+k)^m S_T$ 這一項很容易漏掉。
- 說債務能還清是因為「d 大於 c」。真正要比較的，是 d 與通車時的利息 kS_T。

STEP 之外

遞推關係 $S_n = aS_{n-1} + b$ 是最簡單的*一階線性差分方程*（linear first-order difference equation）。它的解是不動點（fixed point）$b/(1-a)$ 加上 a^n 的某個倍數，這正是我們那條公式的形式：d/k 加上 $(1+k)^m$ 的某個倍數。這個倍數是正還是負，決定了債務是不斷增長還是得以還清；同樣的想法會在不動點的穩定性（stability）和線性常微分方程（linear ODE）中再次出現。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教科書）把差分方程與微分方程並列討論，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 進階題集）則有更多關於遞推關係的 STEP 練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。