詳細解答

STEP III 1988，第 4 題

純數學 • 弧長的最優化

> **STEP III 1988，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q4

關鍵思路

把道路的總長度寫成函數 $L(b)$，然後求導（differentiate）。位於鉛垂平面內的兩段路必須貼着地面走，所以它們的長度是拋物線的弧長（arc length）；半圓的長度是 πb。把弧長積分對其下限求導，根本不需要做任何積分，而 $L'(b)$ 的正負號就決定了一切。

（題目印出的橫截面公式左邊是 $x=$；當然應該是 $z=$。）

解答

建立長度的表達式

設 $h(b)=(a^2-b^2)/(2a)$，即山丘在距離對稱軸 b 處的高度。道路必須鋪在地面上，所以在 (x,z) 平面內由 $(-R,0)$ 到 $(-b,h(b))$ 的路徑別無選擇：它先沿平地由 $x=-R$ 走到 $x=-a$，再沿拋物線由 $x=-a$ 上行至 $x=-b$。第 (iii) 段是它的鏡像。

在山丘上 $z=(a^2-x^2)/(2a)$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{x}{a}$，而由 $x=b$ 到 $x=a$ 的弧長是

$$\int_b^a \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x.$$

半圓 (ii) 是水平的，位於高度 $h(b)$，半徑為 b（它是山丘上通過 $(\pm b,h(b))$ 的緯圈），所以長度是 πb。因此

$$L(b)=2(R-a)+2\int_b^a \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x+\pi b,\qquad 0\le b\le a.$$

這個式子也涵蓋了 $b=0$（沒有半圓；道路直接越過山頂）和 $b=a$（道路繞着山腳走）兩種情況。

求最小值

根據微積分基本定理（fundamental theorem of calculus），對下限求導，所得的是被積函數（integrand）在該處的值再加上負號：

$$L'(b) = \pi - 2\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

> **想一想** 駐點（stationary point）會在哪裏？它在容許的範圍內嗎？

$L'(b) = 0$ 需要 $1 + b^2/a^2 = \pi^2/4$，即 $b = \frac{a}{2}\sqrt{\pi^2 - 4} \approx 1.21a$。這比 a 大，所以落在容許範圍 $0 \le b \le a$ 之外。事實上，當 $0 \le b \le a$ 時，我們有

$$2\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \le 2\sqrt{2} \approx 2.83 < \pi,$$

所以在整個區間上 $L'(b) > 0$。L 嚴格遞增（strictly increasing），其最小值出現在左端點 $b = 0$。

建議：取 $b = 0$。道路應該從山丘的一邊直上，再從另一邊直下，不必繞半圓的彎路。

省下多少路程

順帶一提，原函數（antiderivative）是

$$\int \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{a}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a} + C,$$

（代入 $x = a\sinh t$），所以

$$L(0) = 2(R - a) + a(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) \approx 2(R - a) + 2.296a,$$

而繞山腳走則得 $L(a) = 2(R - a) + \pi a \approx 2(R - a) + 3.142a$。越過山頂大約可省下 $0.85a$。

驗算

- 答案與 R 無關，這是理所當然的：不論 b 是多少，平地部分的總長度都是 $2(R - a)$。
- 粗略檢查一下是否合理：山丘只有 $a/2$ 高、$2a$ 寬，所以越過它不可能比直線距離 $2a$ 多出很多；而繞山腳的半圓長 πa。果然 $2.296a$ 介乎 $2a$ 與 πa 之間。
- 數值上，取 $a = 1$ 和 $R = 3$，在 $[0, 1]$ 的 201 個點上以數值積分（quadrature）計算 $L(b)$，最小值出現在 $b = 0$；而 $L'(a) = \pi - 2\sqrt{2} \approx 0.313$ 仍然是正數。

常見錯誤

- 令 $L'(b) = 0$ 並寫下 $b = \frac{a}{2}\sqrt{\pi^2 - 4}$，卻沒有留意到它比 a 大。
- 第 (i) 段和第 (iii) 段用了直線（弦）的長度：那樣的路會穿山而過。
- 忘記了閉區間（closed interval）上的最小值可以出現在端點。

STEP 之外

在曲面上尋找最短路徑，就是測地線（geodesics）的問題，在變分法（calculus of variations）或微分幾何（differential geometry）的入門課程中會遇到。在旋轉曲面（surface of revolution）上，克萊羅關係式（Clairaut's relation）簡潔地刻畫了測地線；國王的這一族道路，只是該問題中一個小小的單參數切片。這裏用到的兩個分析學事實——對積分的上下限求導，以及閉區間上的連續函數（continuous function）必定取得最小值——在 Abbott 的 *Understanding Analysis* 中有嚴謹的證明。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。