詳細解答

STEP III 1988，第 3 題

純數學 • 複數軌跡

> **STEP III 1988，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q3

關鍵思路

映射 $w = (z+\mathrm{i})/(z-\mathrm{i})$ 可以倒過來用：解出 z 得 $z = \mathrm{i}(w+1)/(w-1)$，於是任何關於 z 的條件都變成關於 w 的條件。至於那個圓，則改用參數表示（parametrisation）來處理，因為這時 $z-\mathrm{i}$ 就只是 $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$。對於實數和虛數兩種情況，可從模（modulus）和輻角（argument）着眼：實數 z 與 i 和 $-\mathrm{i}$ 等距。

解答

參數形式

曲線 $|z-\mathrm{i}| = 2$ 是以 i 為圓心、半徑為 2 的圓，所以

$$z = \mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \qquad -\pi < \theta \leq \pi,$$

或者，設 $z = x + \mathrm{i}y$，則 $x = 2\cos\theta$ 及 $y = 1 + 2\sin\theta$。

我們還會用到逆映射（inverse map）。由 $w(z-\mathrm{i}) = z + \mathrm{i}$ 得 $z(w-1) = \mathrm{i}(w+1)$，所以當 $w \neq 1$ 時

$$z = \frac{\mathrm{i}(w+1)}{w-1}.$$

沒有任何 z 會給出 $w = 1$，因為那需要 $z+\mathrm{i} = z-\mathrm{i}$。每個 $w \neq 1$ 都來自恰好一個 $z \neq \mathrm{i}$。

第 (i) 部分

代入參數形式，$z + \mathrm{i} = 2\mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 及 $z - \mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，所以

$$w = \frac{2\mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = 1 + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2-\theta)}.$$

當 θ 繞行一周時，$\pi/2 - \theta$ 也恰好取遍每個角度一次。所以 w 描出整個圓

$$|w - 1| = 1,$$

其圓心為 1，半徑為 1。例如，$z = 3\mathrm{i}$ 給出 $w = 2$，而 $z = -\mathrm{i}$ 給出 $w = 0$。點 $w = 1$ 不在這個圓上，這與它永遠取不到的事實一致。

第 (ii) 部分

若 $z = x$ 是實數，它與 i 的距離等於它與 $-\mathrm{i}$ 的距離，所以 $|x + \mathrm{i}| = |x - \mathrm{i}|$，而且

$$|w| = \frac{|x + \mathrm{i}|}{|x - \mathrm{i}|} = 1.$$

具體地說，把分子和分母同乘以 $x + \mathrm{i}$，

$$w = \frac{(x + \mathrm{i})^2}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \mathrm{i}\,\frac{2x}{x^2 + 1}.$$

想一想 單位圓上的每一點都能取到嗎？

不，還差一點。任取滿足 $|w| = 1$ 且 $w \neq 1$ 的 w，並寫成 $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$。那麼

$$z = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} + 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} - 1} = \mathrm{i}\,\frac{2\cos(\phi/2)}{2\mathrm{i}\sin(\phi/2)} = \cot\tfrac{\phi}{2},$$

這是實數。所以每個這樣的點都能取到，但 $w = 1$ 永遠取不到：它是 $x \to \pm\infty$ 時的極限。所求軌跡 (locus) 是單位圓 $|w| = 1$ 除去 $w = 1$ 這一點。例如，$x = 0$ 給出 $w = -1$，而 $x = 1$ 給出 $w = \mathrm{i}$。

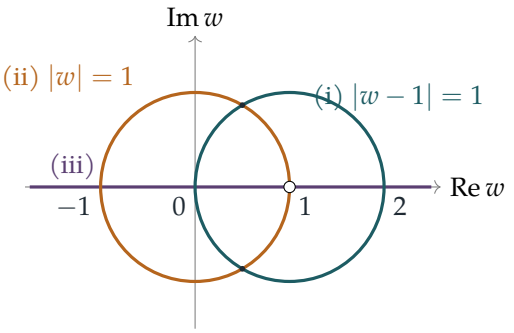
第 (iii) 部分

若 $z = \mathrm{i}y$，其中 y 為實數且 $y \neq 1$，則

$$w = \frac{\mathrm{i}(y + 1)}{\mathrm{i}(y - 1)} = \frac{y + 1}{y - 1} = 1 + \frac{2}{y - 1},$$

這是實數。當 y 取遍 1 以外的所有實數時，分數 $2/(y - 1)$ 取遍每個非零實數值，所以 w 取遍 1 以外的每個實數值。(反過來，若 $w = u$ 是實數且 $u \neq 1$，則 $z = \mathrm{i}(u + 1)/(u - 1)$ 是虛數。) 所求軌跡是實軸除去 $w = 1$ 這一點。這裏 $z = 0$ 給出 $w = -1$；如果你把「虛數」理解為不包括 $z = 0$，那麼 $w = -1$ 也要除去。

略圖



藍綠色的圓是 (i) 的軌跡，琥珀色的圓（除去點 1）是 (ii) 的軌跡，紫色的軸（除去點 1）是 (iii) 的軌跡。空心圓點標示 $w = 1$，這一點永遠取不到。

驗算

- (i) 中的圓與實軸相交於 $z = \pm\sqrt{3}$。這兩點應該映射到同時位於藍綠色圓和琥珀色圓上的點，而事實上 $w(\sqrt{3}) = (\sqrt{3}+\mathrm{i})^2/4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \approx 0.5 + 0.866\mathrm{i}$，它確實既在 $|w| = 1$ 上，也在 $|w-1| = 1$ 上。
- (i) 中的圓與虛軸相交於 $3\mathrm{i}$ 和 $-\mathrm{i}$，它們分別映射到 2 和 0：正好是藍綠色圓與實軸相交之處。
- 在每條軌跡上各取 10^4 個隨機點作數值檢驗，結果確認了 $|w-1| = 1$、$|w| = 1$ 和 $\operatorname{Im} w = 0$，並顯示逆映射能還原出 z。

常見錯誤

- 忘記 (ii) 和 (iii) 中缺少了 $w = 1$。它對應於「$z = \infty$」。
- 在 (i) 中展開成 x 和 y，結果迷失在代數運算之中。參數表示令 $z - \mathrm{i}$ 變成單一個指數式，餘下的只需一行。

STEP 之外

映射 $z \mapsto (z+\mathrm{i})/(z-\mathrm{i})$ 是一個莫比烏斯變換（Möbius transformation）。這類映射總是把圓和直線映射成圓和直線，這正是你在三個部分中所發現的。要理解它們，最好放在黎曼球面（Riemann sphere）上看：在那裏加入一個「無窮遠點」（point at infinity），便填補了 $w = 1$ 處的缺口。它的近親凱萊變換（Cayley transform）$z \mapsto (z-\mathrm{i})/(z+\mathrm{i})$

把上半平面（upper half-plane）映射到單位圓盤（unit disc）上。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）對這一切有十分優美的幾何處理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。