詳細解答

STEP III 1988，第 2 題

純數學 • 線性遞推關係

> **STEP III 1988，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q2

關鍵思路

常係數線性遞歸關係（linear recurrence with constant coefficients）的表現就像一條二次方程：冪 x^n 是它的解，當且僅當 x 是輔助方程（auxiliary equation）的根。由於只要知道首兩項，遞歸關係便決定了其後每一項，所以只需配對 u_0 和 u_1，就能得到唯一的解。最後一部分的係數是可變的，但因子 $(n+1)$、$(n+2)$、$(n+3)$ 提示我們把全式除以它們的乘積，然後用一個簡單的代換（substitution），便可把它化為第一種的常係數遞歸關係。

解答

（試卷上把遞歸關係的首項係數印成 α。這顯然是 a 的誤植，應與二次式 ax^2+bx+c 一致，我們就按此理解。）由於這條二次方程有兩個根，它確實是二次的，所以 $a \neq 0$。

公式滿足遞歸關係

設 $u_n = A\alpha^n + B\beta^n$，其中 A、B 為任意常數。那麼

$$\begin{aligned} au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n &= A\alpha^n\left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) + B\beta^n\left(a\beta^2 + b\beta + c\right) \\ &= A\alpha^n \cdot 0 + B\beta^n \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

因為 α 和 β 是 $ax^2+bx+c=0$ 的根。所以遞歸關係對每個 $n \geq 0$ 都成立。

取題目所給的特定 A 和 B 時，公式亦能重現初始值。當 $n=0$，

$$A + B = \frac{(u_1 - \beta u_0) - (u_1 - \alpha u_0)}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)u_0}{\alpha - \beta} = u_0,$$

而當 $n = 1$，

$$A\alpha + B\beta = \frac{\alpha u_1 - \alpha\beta u_0 - \beta u_1 + \alpha\beta u_0}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)u_1}{\alpha - \beta} = u_1.$$

由於兩根相異，所以可以除以 $\alpha - \beta$。

它是唯一的解

想一想 我們究竟是對甚麼作歸納？為甚麼每次需要兩項？

假設 $u_0, u_1, u_2, \ldots$ 是任何一個滿足該遞歸關係的數列（sequence），並設 A、B 如上由它的 u_0 和 u_1 構造而成。記 $w_n = A\alpha^n + B\beta^n$。我們對 n 用歸納法（induction）證明以下命題：

$$P(n): \quad u_n = w_n \text{ 及 } u_{n+1} = w_{n+1}.$$

每個新的項都取決於它之前的兩項，所以命題必須同時包含連續兩項。

基礎步驟（*base case*）。$P(0)$ 是說 $u_0 = w_0$ 及 $u_1 = w_1$，這正是我們在上面驗證過的。

歸納步驟（*inductive step*）。假設 $P(n)$ 成立。(u_n) 和 (w_n) 都滿足遞歸關係，而且 $a \neq 0$，所以

$$u_{n+2} = -\frac{bu_{n+1} + cu_n}{a} = -\frac{bw_{n+1} + cw_n}{a} = w_{n+2}.$$

連同 $u_{n+1} = w_{n+1}$，這就是 $P(n+1)$。

所以 $P(n)$ 對所有 $n \geq 0$ 成立，即對每個 n 都有 $u_n = A\alpha^n + B\beta^n$。遞歸關係的任何解都具有這個形式，其中 A 和 B 由 u_0 和 u_1 決定。這條公式給出的就是唯一的解。

數列 v_n

每個係數都是 $(n+1)$、$(n+2)$、$(n+3)$ 這三個因子中其中兩個的乘積，而各自缺少的因子都不相同。除以 $(n+1)(n+2)(n+3)$（當 $n \geq 0$ 時它永不為零），得

$$8\,\frac{v_{n+2}}{n+3} - 2\,\frac{v_{n+1}}{n+2} - \frac{v_n}{n+1} = 0.$$

每個分數都具有 $v_k/(k+1)$ 的形式。因此設

$$w_n = \frac{v_n}{n+1},$$

遞歸關係便變成

$$8w_{n+2} - 2w_{n+1} - w_n = 0, \qquad w_0 = 0, \quad w_1 = \tfrac{1}{2}.$$

輔助方程是 $8x^2 - 2x - 1 = 0$，即 $(2x-1)(4x+1) = 0$。它的根 $\alpha = \frac{1}{2}$ 和 $\beta = -\frac{1}{4}$ 是相異實根，所以第一部分的結果適用，其中 $\alpha - \beta = \frac{3}{4}$：

$$A = \frac{w_1 - \beta w_0}{\alpha - \beta} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}, \qquad B = \frac{w_1 - \alpha w_0}{\beta - \alpha} = \frac{1/2}{-3/4} = -\frac{2}{3}.$$

因此 $w_n = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)$。第一部分亦告訴我們，這是 w_n 唯一的可能，因而也是 v_n 唯一的可能。乘回 $n+1$，得

$$\boxed{v_n = \frac{2(n+1)}{3}\left(\frac{1}{2^n} - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

驗算

公式給出 $v_0 = \frac{2}{3}(1-1) = 0$ 和 $v_1 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 1$，符合要求。以 $n = 0$ 和 $n = 1$ 用人手計算原來的遞歸關係，得 $16v_2 = 6v_1 + 6v_0$，所以 $v_2 = \frac{3}{8}$；然後 $48v_3 = 16v_2 + 12v_1$，所以 $v_3 = \frac{3}{8}$。公式的結果與此吻合：$v_2 = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) = \frac{3}{8}$ 及 $v_3 = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{64}\right) = \frac{3}{8}$。我們以有理數運算，對 n 直至 41 精確地核對過公式與遞歸關係相符，亦以數百組隨機的二次方程和初始值核對過第一部分。

常見錯誤

- 每次只對一項作歸納。單憑 $u_n = w_n$，無法推出任何關於 u_{n+1} 的結論：歸納假設必須涵蓋連續兩項。
- 忘記說明為何可以除以 a（因為方程有兩個根，所以它不為零）和除以 $\alpha - \beta$（兩根相異）。
- 直接把第一部分應用於 v_n。它的係數取決於 n，所以第一部分適用的，是經重新縮放的數列 $w_n = v_n/(n+1)$。

STEP 之外

二階線性遞歸關係的解構成一個二維向量空間（vector space），而 α^n、β^n 是它的一組基（basis）。這與微分方程（differential equation）$ay'' + by' + cy = 0$ 及其解 $e^{\alpha x}$ 和 $e^{\beta x}$ 的情況完全平行。把遞歸關係寫成 $\mathbf{u}_{n+1} = M\mathbf{u}_n$，其中 M 是一個 2×2 矩陣，便可看出 α 和 β 是 M 的特徵值（eigenvalue），而重根則對應於不能對角化（diagonalise）的矩陣。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）正是這樣透過特徵值來處理差分方程（difference equation），而 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）則為微分方程建立了平行的理論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。