詳細解答

STEP III 1988，第 15 題

概率與統計 • 期望值的遞推關係

> **STEP III 1988，第 15 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q15

關鍵思路

對當天的第一本書取條件（conditioning）。這本書一旦上了架，當天餘下的過程就與書架較短的全新一天完全一樣，所以長度為 n 的書架的期望（expected）本數，與長度為 $n-1$ 和 $n-2$ 時的期望本數有關。由此得到一條線性差分方程（difference equation），解法與二階遞推關係（recurrence）一樣：齊次（homogeneous）部分用輔助二次方程（auxiliary equation）處理，再為右邊的常數 1 找一個特解（particular solution）。

解答

以下一律設 N_n 為書架長度為 n 的一天內放上書架的書本數目，因此 $M(n) = \mathrm{E}(N_n)$。各本書是厚是薄互相獨立（independent），每本為厚書的概率是 p。題目說明書本數量總是多於書架所能容納的，所以每天最終必定有某本書放不下。

第 (i) 部分

當 $n = 0$ 時，書架完全沒有空位。第一本書不論厚薄都放不下，所以它和其後每一本書都要放到手推車上。因此 $N_0 = 0$ 恆成立，而 $M(0) = 0$。

第 (ii) 部分

當 $n = 1$ 時，考慮第一本書。

- 若它是薄書（概率為 q），它放得下，並剛好放滿書架。下一本書至少需要一個單位，所以放不下，自此所有書都放到手推車上。故 $N_1 = 1$。

- 若它是厚書（概率為 p），它需要兩個單位，放不下，故 $N_1 = 0$。

因此 $M(1) = q \cdot 1 + p \cdot 0 = q$。

第 (iii) 部分

設 $n \geq 2$，同樣對第一本書取條件。不論它是哪一種書都放得下，因為它最多只需要 $2 \leq n$ 個單位。

- 若它是薄書（概率為 q），它上架後餘下 $n-1$ 個單位。
- 若它是厚書（概率為 p），它上架後餘下 $n-2$ 個單位。

> **想一想** 為甚麼在第一種情況下，其後上架書本數目的期望值恰好是 $M(n-1)$？

第一本書之後，其餘的書依次到來，它們是厚是薄與第一本書獨立，概率亦相同，而且按同一規則擺放：一直上架，直到有一本放不下為止。第一本書唯一改變了的是剩餘空間，現在是 $n-1$ 個單位。所以當天餘下的過程，就是書架長度為 $n-1$ 的完整一天的翻版，其後上架書本數目的期望值是 $M(n-1)$。同理，若第一本是厚書，這個期望值就是 $M(n-2)$。（根據第 (i) 部分，當 $n-2=0$ 時這也成立。）

把第一本書也計算在內，由全期望定律（law of total expectation）得

$$\begin{aligned} M(n) &= q\big(1 + M(n-1)\big) + p\big(1 + M(n-2)\big) \\ &= (p+q) + qM(n-1) + pM(n-2), \end{aligned}$$

而由於 $p+q=1$，

$$M(n) - qM(n-1) - pM(n-2) = 1 \qquad (n \geq 2),$$

這正是所要證明的。

閉合公式

先考慮齊次方程 $M(n) - qM(n-1) - pM(n-2) = 0$。代入 $M(n) = \lambda^n$ 試解，得輔助方程

$$\lambda^2 - q\lambda - p = 0.$$

由於 $q = 1-p$，$\lambda = 1$ 是一個根（$1 - q - p = 0$），而兩根之積為 $-p$，所以

$$\lambda^2 - q\lambda - p = (\lambda - 1)(\lambda + p).$$

因此對任意 A 和 B，$A(-p)^n$ 和常數 B 都滿足齊次方程。

因為 1 是一個根，常數無法產生右邊的 1，所以我們改試 Cn。代入得

$$\begin{aligned} Cn - qC(n-1) - pC(n-2) &= C\big[(1-q-p)n + q + 2p\big] \\ &= C(q+2p) = C(1+p). \end{aligned}$$

當 $C = \dfrac{1}{1+p}$ 時，上式等於 1；由於 $1+p > 0$，這個取值沒有問題。於是由線性性質（linearity），不論 A 和 B 取何值，$M(n) = A(-p)^n + B + Cn$ 對所有 $n \geq 2$ 都滿足 (iii) 中的方程。

現在代入初始值。由第 (i) 部分得

$$M(0) = A + B = 0, \qquad \text{所以} B = -A,$$

而由第 (ii) 部分得

$$M(1) = -Ap + B + C = -A(1+p) + \frac{1}{1+p} = 1 - p.$$

因此

$$A(1+p) = \frac{1}{1+p} - (1-p) = \frac{1-(1-p^2)}{1+p} = \frac{p^2}{1+p},$$

所以

$$A = \frac{p^2}{(1+p)^2}, \qquad B = -\frac{p^2}{(1+p)^2}, \qquad C = \frac{1}{1+p}.$$

即

$$M(n) = \frac{n}{1+p} - \frac{p^2}{(1+p)^2}\big(1 - (-p)^n\big).$$

由於 (i)、(ii) 和 (iii) 確定了 $M(0)$、$M(1)$，繼而逐一確定其後每一個值，所以這不僅是一個可能的解，更是唯一的解。

驗算

- $p = 0$（全是薄書）：$M(n) = n$，理應如此。
- $p = 1$（全是厚書）：$M(n) = \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\big(1 - (-1)^n\big)$，當 n 為偶數時是 $\frac{n}{2}$，當 n 為奇數時是 $\frac{n-1}{2}$，即 $\lfloor n/2 \rfloor$。正確。
- 取 $p = q = \frac{1}{2}$，直接由遞推關係計算：$M(2) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$，而公式給出 $\frac{2}{3} - \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$。
- 當 n 很大時，每本書平均佔用 $1+p$ 個單位，所以我們預期大約有 $n/(1+p)$ 本書；公式與此吻合，另加一個有界的修正項，來自書架末端浪費掉的空間。

我們已把這個閉合公式與上架過程的精確枚舉結果核對（$n \leq 12$，並取多個 p 值），亦以模擬作了核對；例如當 $p = \frac{1}{2}$ 及 $n = 5$ 時，兩者都給出 $M(5) = \frac{103}{32} \approx 3.219$。

常見錯誤

- 以為厚書放不下之後，薄書仍然可以上架。題目說明其後所有書都放到手推車上，這正是 $M(1) = q$ 而不是更大的數值的原因。
- 以常數作為特解來試：因為 $\lambda = 1$ 是輔助方程的解，常數會被齊次部分吸收，所以需要用 Cn。

STEP 之外

對第一步取條件，並留意到餘下的部分是同一問題的較小翻版，這種方法稱為*首步分析*（first-step analysis）。它是在馬可夫鏈（Markov chain）中求期望首達時間（hitting time）和吸收概率（absorption probability）的標準方法。我們的答案亦說明了*更新定理*（renewal theorem）：若把大小隨機的物件裝進長度 n 之內，能裝下的數目的增長速度與 n 除以平均大小相若。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率入門教科書）既涵蓋隨機漫步（random walk）的差分方程，亦有馬可夫鏈的入門介紹。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。