詳細解答

STEP III 1988，第 14 題

力學 • 光滑金屬線上的運動

STEP III 1988，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

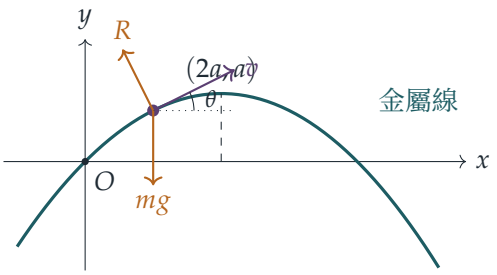
step.maths.org/questions/88-s3-q14

關鍵思路

如果金屬線對小珠完全不施力，小珠就只是一個拋體（projectile），僅在重力作用下運動。所以第 (i) 部分問的是：一個沿金屬線方向拋出的自由拋體，能否剛好沿着金屬線的拋物線（parabola）運動？把兩條拋物線對照起來即可。至於第 (ii) 部分，金屬線是光滑的，所以能量守恆（conservation of energy）。真正要做的功夫，是利用 $\tan\theta = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，把速率和高度用斜角 θ 表示出來。

解答

我們把小珠視為一個質量為 m 的質點（particle），套在一條固定的光滑金屬線上。作用在它身上的力只有兩個：垂直向下的重量 mg，以及金屬線的法向反作用力（normal reaction）R，後者與金屬線垂直。



以下會反覆用到關於金屬線的兩個事實。在一般的點上，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{x}{2a},$$

所以在原點處斜率為 1，小珠出發時的方向與 x-軸成 45° 仰角。由於金屬線是一條開口向下的拋物線，它的最高點位於 $x = 2a, y = a$。

第 (i) 部分

假設在整個運動過程中 $R = 0$。那麼重力就是唯一的力，小珠的運動便與一個以初速率 V、仰角 45° 拋出的拋體完全相同。它的水平速度保持不變，恆為 $V/\sqrt{2}$，所以 $x = Vt/\sqrt{2}$。同時

$$y = \frac{V}{\sqrt{2}}\,t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

以 $t = \sqrt{2}\,x/V$ 消去時間，得到軌跡（trajectory）

$$y = x - \frac{gx^2}{V^2}.$$

只有當這條曲線在小珠所到達的每一個 x 處都與金屬線 $y = x - x^2/(4a)$ 重合，它才是小珠的路徑。這就需要

$$\frac{g}{V^2} = \frac{1}{4a}, \qquad \text{即} \qquad V = 2\sqrt{ag}.$$

反過來，取 $V = 2\sqrt{ag}$。一個從 O 以這個速率、仰角 45° 拋出的自由質點，會沿着曲線 $y = x - x^2/(4a)$ 運動，而這正是金屬線本身。因此它沿着金屬線運動，每一刻都有 $R = 0$，而這個運動在反作用力為零的情況下滿足小珠的運動方程(equation of motion)。由於 $x = Vt/\sqrt{2}$ 穩定地增加，小珠會越過位於 $(2a, a)$ 的頂點，並沿另一邊一直向下運動，永不停止。在整個過程中，它對金屬線不施加任何壓力，符合題目要求，而所求的速率是 $V = 2\sqrt{ag}$。

> ? **想一想** 套在金屬線上的小珠，怎可能在完全沒有反作用力的情況下運動？金屬線不是要把它留在線上嗎？

只有當單靠重力會令小珠偏離曲線時，金屬線才需要施力。換了任何其他速率，情況正是如此。V 較大時，拋體的拋物線較平坦，所以金屬線必須把小珠向下拉。V 較小時，拋物線彎曲得較厲害，所以金屬線必須把小珠托住。而剛好在 $V = 2\sqrt{ag}$ 時，重力已經提供了曲線所需的加速度，金屬線便無事可做。

第 (ii) 部分

現在 V 是任意的。速度沿着金屬線的切線（tangent）方向，所以

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{x}{2a}, \qquad \text{所以} \qquad x = 2a(1 - \tan\theta).$$

（如果小珠向後滑回，它的速度便沿切線指向相反方向，角度改變 π。這時 $\tan\theta$ 和 $\cos^6\theta$ 都不變，所以下文不受任何影響。）

以 θ 表示速率。把 $x = 2a(1 - \tan\theta)$ 對 t 求導，得

$$\dot{x} = -2a\sec^2\theta\,\dot{\theta}.$$

由於 $\dot{y} = \tan\theta\,\dot{x}$，速率 v 滿足

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2(1 + \tan^2\theta) = \dot{x}^2\sec^2\theta = \frac{4a^2\dot{\theta}^2}{\cos^6\theta}.$$

以 θ 表示高度。記 $T = \tan\theta$，於是 $x = 2a(1 - T)$，

$$\begin{aligned} y = x - \frac{x^2}{4a} &= 2a(1-T) - a(1-T)^2 \\ &= a(1-T)\big(2 - (1-T)\big) \\ &= a(1-T)(1+T) = a(1 - \tan^2\theta). \end{aligned}$$

能量。金屬線是光滑的，而 R 與速度垂直，所以 R 不作功，機械能（mechanical energy）守恆。小珠從 O 以速率 V 出發，所以

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgy = \tfrac{1}{2}mV^2, \qquad \text{即} \qquad v^2 + 2gy = V^2.$$

代入 v^2 和 y 的表達式，得

$$\frac{4a^2\dot{\theta}^2}{\cos^6\theta} + 2ga(1 - \tan^2\theta) = V^2,$$

這就是所要證明的結果。

驗算

- 在 $t = 0$ 時，我們有 $\theta = 45°$，所以 $\tan^2\theta = 1$，第二項消失。這時第一項就是 $v^2 = V^2$，與預期相符。
- 取第 (i) 部分的 $V^2 = 4ag$，則 $\dot{x} = V/\sqrt{2}$ 為常數，所以 $\dot{\theta} = -\dot{x}\cos^2\theta/(2a)$。第一項變成 $2ag\sec^2\theta = 2ag(1 + \tan^2\theta)$。加上 $2ga(1 - \tan^2\theta)$ 便得 $4ag = V^2$。兩部分的結果互相吻合。
- 數值方面，我們用龍格－庫塔法（Runge–Kutta method）沿金屬線逐步計算小珠的運動方程。取 $a = 1$、$g = 9.8$ 和 $V = 2\sqrt{9.8}$，算出的法向反作用力（以每單位質量計）一直到 $x \approx 13$ 都保持在 10^{-15} 以下。把 V 增加 30% 後，它在起點處約為 4.8。對於隨機選取的 V 值，包括一些令小珠向後滑回的情況，第 (ii) 部分的恆等式都成立，相對誤差約為 10^{-13}。

常見錯誤

- 只證明了在拋出的一刻 $R = 0$。題目要求的是一個自始至終都沒有反作用力的運動，這正是我們要把整條軌跡與金屬線對照的原因。
- 對 $\tan\theta$ 求導時，忘記了鏈式法則（chain rule）所帶來的因子 $\sec^2\theta$。這樣第一項中便會出現 $\cos^2\theta$，而不是 $\cos^6\theta$。

STEP 之外

第 (ii) 部分是這個運動的一個首次積分（first integral）：能量守恆把一條二階方程化為只含單一坐標（這裏是 θ）的一階方程。在大學一年級的課程中，這會發展成處理約束運動（constrained motion）的拉格朗日（Lagrangian）方法：你只需選取一個能描述約束的坐標，完全不必計算反作用力。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對約束運動和能量方法有細緻的處理，很值得一讀。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。