詳細解答

STEP III 1988，第 13 題

力學 • 有空氣阻力的拋體

STEP III 1988，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/88-s3-q13

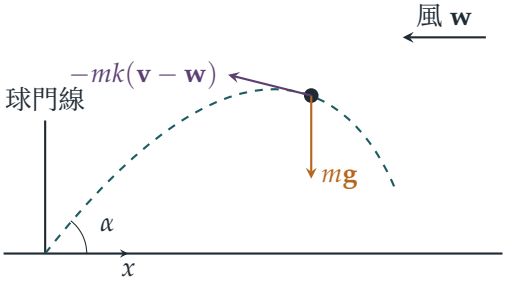
關鍵思路

空氣阻力與速度成正比時，運動方程（equation of motion）是線性的，因此每個分量都可以用積分因子（integrating factor）求解。要看清最後一部分，最簡潔的方法是問：終端速度（terminal velocity）是甚麼？速度會由初始值按指數規律趨向終端速度，所以若這兩個向量平行，速度便永遠不會離開通過原點的同一條直線。於是皮球沿着同一條直線路徑飛出去，再飛回來。

解答

運動方程

我們把皮球看成質量為 m 的質點（particle）。作用於它的力有兩個：重量 $m\mathbf{g}$，以及空氣阻力。皮球相對於空氣的速度是 $\mathbf{v}-\mathbf{w}$，而阻力與這個相對速度方向相反，所以阻力是 $-mk(\mathbf{v}-\mathbf{w})$。



由牛頓第二定律（Newton's second law）得

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\mathbf{g} - mk(\mathbf{v} - \mathbf{w}).$$

兩邊除以 m 並移項，

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} + k\mathbf{v} = \mathbf{g} + k\mathbf{w},$$

這正是所要證明的結果。

時間 t 時的位置

取開球點為原點，x 軸為水平方向並指向開球的方向，y 軸垂直向上。記 $V = |\mathbf{v}_0|$、$W = |\mathbf{w}|$ 及 $g = |\mathbf{g}|$。皮球是迎着風踢出的，所以

$$\mathbf{w} = (-W, 0), \qquad \mathbf{g} = (0, -g), \qquad \mathbf{v}_0 = (V\cos\alpha, V\sin\alpha).$$

設 $\mathbf{v} = (u, v)$，運動方程的兩個分量便是

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + ku = -kW, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kv = -g.$$

把第一式乘以積分因子 e^{kt}，得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u\,\mathrm{e}^{kt}) = -kW\mathrm{e}^{kt}$，所以 $u\,\mathrm{e}^{kt} = -W\mathrm{e}^{kt} + C$。由於 $t = 0$ 時 $u = V\cos\alpha$，故 $C = V\cos\alpha + W$，於是

$$u = -W + (V\cos\alpha + W)\,\mathrm{e}^{-kt}.$$

用完全相同的方法，

$$v = -\frac{g}{k} + \left(V\sin\alpha + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-kt}.$$

再由 0 至 t 積分一次，並利用 $t = 0$ 時 $x = y = 0$ 以及 $\int_0^t \mathrm{e}^{-ks}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt})$，得

$$x = -Wt + \frac{V\cos\alpha + W}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt}),$$
$$y = -\frac{g}{k}\,t + \frac{1}{k}\left(V\sin\alpha + \frac{g}{k}\right)(1 - \mathrm{e}^{-kt}).$$

寫成向量形式，設 $\mathbf{u}_\infty = \mathbf{w} + \mathbf{g}/k$（即終端速度，亦即運動方程的常數解），上式便是

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_\infty t + \frac{1}{k}\,(\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_\infty)(1 - \mathrm{e}^{-kt}).$$

烏龍球

? **想一想** $\tan\alpha = g/(kW)$ 這個條件，說明了終端速度的甚麼性質？

終端速度是 $\mathbf{u}_\infty = (-W, -g/k) = -W(1, g/(kW))$。條件給出 $g/(kW) = \tan\alpha$，所以 $\mathbf{u}_\infty = -W(1, \tan\alpha)$，它與 $\mathbf{v}_0$ 平行（方向相反）。由向量公式可見，$\mathbf{r}$ 此時始終是兩個沿 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 方向的向量的組合，所以皮球沿直線 $y = x\tan\alpha$ 運動。

若要直接從分量看出這一點，可利用 $g/k = W\tan\alpha$：

$$V\sin\alpha + \frac{g}{k} = V\sin\alpha + W\tan\alpha = \tan\alpha\,(V\cos\alpha + W),$$

所以

$$y = \tan\alpha\left[-Wt + \frac{V\cos\alpha + W}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt})\right] = x\tan\alpha \quad \text{對所有} t \geq 0.$$

因此，皮球位於地面（即 $y = 0$）當且僅當 $x = 0$（因為 $\tan\alpha \neq 0$）。餘下要檢查的，是這情況確實在某個 $t > 0$ 發生。設 $f(t) = x(t)$。則 $f(0) = 0$ 而 $f'(0) = V\cos\alpha > 0$，所以剛踢出之後 $x > 0$。此外

$$f''(t) = -k(V\cos\alpha + W)\,\mathrm{e}^{-kt} < 0,$$

所以 f 是嚴格凹函數（strictly concave），而且由於有 $-Wt$ 一項，當 $t \to \infty$ 時 $f(t) \to -\infty$。因此 f 恰好有一個正零點 T，並且在該處 $f'(T) < 0$（一個由 0 升起的凹函數，在跌回 0 時必定正在遞減）。

在時間 T，皮球回到原點，即球門線上開球的那一點，而且水平速度為負，也就是說正朝着球門移動。它沿着飛出去時的那條直線飛回來，並在地面高度越過球門線，遠低於橫楣。既然守門員不在位，這便是一個烏龍球。

驗算

- 當 $k \to 0$ 時，$\frac{1}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt}) \to t$ 而 $\frac{1}{k}\left(t - \frac{1}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt})\right) \to \frac{1}{2}t^2$，所以 $x \to Vt\cos\alpha$ 而 $y \to Vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$：這正是普通的拋體運動（projectile motion）。
- 當 $t \to \infty$ 時，速度趨向 $(-W, -g/k)$，即運動方程的常數解：皮球最終隨風飄移，同時以終端速率下墜。
- 以龍格－庫塔法（Runge–Kutta）對運動方程作數值積分，在隨機選取多組 V, α, W, k 的情況下，結果與 x 和 y 的公式相符，誤差約為 10^{-13}。當 $\tan\alpha = g/(kW)$ 時，計算所得的路徑一直留在 $y = x\tan\alpha$ 上，並在 $x = 0$ 處着地，而且 $u < 0$；若取例如 $V = 20$、$\alpha = 0.6$、$W = 5$、$k = 0.5$，皮球則落在前場 17.1 m 處。

常見錯誤

- 把阻力取為 $-mk\mathbf{v}$（相對於地面），而不是 $-mk(\mathbf{v} - \mathbf{w})$。
- 弄錯 $\mathbf{w}$ 的正負號：皮球是迎着風踢出的，所以 $\mathbf{w}$ 指向球門的方向。
- 得出 $y = x\tan\alpha$ 便停下來，沒有檢查皮球是否真的回到 $x = 0$，以及回到該處時是否正朝着球門移動。

STEP 之外

方程 $\dot{\mathbf{v}} + k\mathbf{v} = \mathbf{F}$（其中 $\mathbf{F}$ 為常數）是線性系統鬆弛至平衡狀態（equilibrium）的最簡單例子：偏差 $\mathbf{v} - \mathbf{F}/k$ 按 e^{-kt} 的方式衰減。線性阻力只對細小而緩慢的物體才符合實際；足球實際所受的阻力大致與其速率的平方成正比，這令方程變成非線性，並使水平與垂直方向的運動互相耦合。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對這兩種阻力都有討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。