詳細解答

STEP III 1988，第 12 題

力學 • 斜碰撞

> **STEP III 1988，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q12

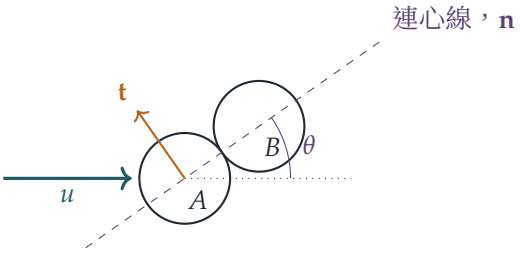
關鍵思路

對光滑球體而言，碰撞瞬間的衝量（impulse）只沿連心線（line of centres）作用。因此我們把每個速度分解為沿連心線的分量和垂直於連心線的分量：垂直分量完全不受影響，而沿連心線方向則是一個普通的一維碰撞。於是一切都取決於一個未知量，即連心線與第一個球原來速度之間的夾角。

解答

建立模型

把兩球視為質量同為 m 的光滑球體，在光滑桌面上滑動，因此碰撞期間唯一的水平力就是沿連心線的接觸衝量。設第一個球 A 以速率 u 運動，並設碰撞時連心線與 A 的速度成角 θ，其中 $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$（若 $\theta = \frac{1}{2}\pi$，兩球只是擦過，甚麼也不會發生）。取單位向量（unit vector）$\mathbf{n}$ 沿連心線（由 A 指向 B），$\mathbf{t}$ 與之垂直。



碰撞前，A 沿 $\mathbf{n}$ 的分量為 $u\cos\theta$，沿 $\mathbf{t}$ 的分量為 $u\sin\theta$；B 靜止。

沿 $\mathbf{t}$ 方向：兩球在這個方向上都沒有受到衝量，所以 A 保持 $u\sin\theta$，B 保持 0。

沿 $\mathbf{n}$ 方向：設碰撞後的分量為 v_A 和 v_B。由動量守恆（conservation of momentum）（質量互相約去）和牛頓恢復定律（Newton's law of restitution）得

$$v_A + v_B = u\cos\theta, \qquad v_B - v_A = e\,u\cos\theta,$$

所以

$$v_A = \tfrac{1}{2}(1-e)\,u\cos\theta, \qquad v_B = \tfrac{1}{2}(1+e)\,u\cos\theta.$$

因此碰撞後

$$\mathbf{v}_A = \tfrac{1}{2}(1-e)u\cos\theta\,\mathbf{n} + u\sin\theta\,\mathbf{t}, \qquad \mathbf{v}_B = \tfrac{1}{2}(1+e)u\cos\theta\,\mathbf{n}.$$

兩個速度之間的夾角

B 沿連心線運動，而兩個速度之間的夾角為銳角，當且僅當它們的純量積（scalar product）為正。這裏

$$\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B = \tfrac{1}{4}(1-e)(1+e)\,u^2\cos^2\theta > 0,$$

因為 $e < 1$、$u \neq 0$，而且當 $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$ 時 $\cos\theta > 0$。故此兩個速度之間的夾角小於 $\frac{1}{2}\pi$，這正是所要證明的。（對於正面碰撞，即 $\theta = 0$，兩球沿同一直線運動，夾角為 0。）

留意 $e < 1$ 在哪裏用到：若 $e = 1$，則 $v_A = 0$，兩球恰好成直角分開，這就是大家熟悉的桌球結果。

最大偏轉角

設 ϕ 為 A 的偏轉角（angle of deflection），即 $\mathbf{v}_A$ 與原來方向 $\cos\theta\,\mathbf{n} + \sin\theta\,\mathbf{t}$ 之間的夾角。記 $k = \frac{1}{2}(1-e)$，則 $0 < k \le \frac{1}{2}$，且 $\mathbf{v}_A = u(k\cos\theta\,\mathbf{n} + \sin\theta\,\mathbf{t})$。對方向向量 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 和 $(k\cos\theta, \sin\theta)$ 使用純量積和二維叉積（cross product），得

$$|\mathbf{v}_A|\cos\phi = u\,(k\cos^2\theta + \sin^2\theta),$$
$$|\mathbf{v}_A|\sin\phi = u\,(\cos\theta\sin\theta - k\cos\theta\sin\theta) = u\,(1-k)\sin\theta\cos\theta.$$

第一式為正，所以 ϕ 是銳角；兩式相除（再把分子和分母同除以 $\cos^2\theta$），並記 $t = \tan\theta \ge 0$，得

$$\tan\phi = \frac{(1-k)t}{k+t^2}.$$

> **想一想** 怎樣才能不經繁瑣的求導而求出這個式子的最大值？

由於 ϕ 是銳角，求 ϕ 的最大值等同於求 $\tan\phi$ 的最大值。當 $t > 0$ 時，

$$\tan\phi = \frac{1-k}{k/t + t} \quad \text{而} \quad \frac{k}{t} + t \ge 2\sqrt{k}$$

這是由算術平均—幾何平均不等式（AM–GM inequality）得出的，等號成立當且僅當 $t = \sqrt{k}$。（當 $t = 0$ 時，$\phi = 0°$）所以最大值在 $\tan\theta = \sqrt{k}$ 時取得，且

$$\tan\phi_{\max} = \frac{1-k}{2\sqrt{k}}.$$

要轉換成正弦，留意 $(1-k)^2 + (2\sqrt{k})^2 = 1 - 2k + k^2 + 4k = (1+k)^2$，所以在兩條直角邊為 $1-k$ 和 $2\sqrt{k}$ 的直角三角形中，斜邊為 $1+k$，於是

$$\sin\phi_{\max} = \frac{1-k}{1+k} = \frac{\frac{1}{2}(1+e)}{\frac{1}{2}(3-e)} = \frac{1+e}{3-e},$$

當中用到 $1-k = \frac{1}{2}(1+e)$ 和 $1+k = \frac{1}{2}(3-e)$。由於 $\phi_{\max}$ 是銳角，

$$\phi_{\max} = \sin^{-1}\left(\frac{1+e}{3-e}\right),$$

這就是所求的結果。它出現於連心線與原來運動方向成角 $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1}{2}(1-e)}$ 之時。

驗算

- $e \to 1$：公式給出 $\sin^{-1}1 = \frac{1}{2}\pi$，與完全彈性（perfectly elastic）的情況一致：此時 A 失去沿連心線的全部速度，所以它總是沿垂直於連心線的方向運動，而一次接近正面的撞擊會使它以接近直角的方向偏離原來的路徑。
- $e = 0$：$\sin\phi_{\max} = \frac{1}{3}$，所以 $\phi_{\max} \approx 0.3398$ rad（19.5°）。
- $e = \frac{1}{2}$：$\sin\phi_{\max} = \frac{3}{5}$，$\phi_{\max} \approx 0.6435$ rad，出現於 $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2} \approx 0.4636$。以數值方法對 200 000 個 θ 值逐一計算偏轉角，結果與這兩個數字吻合；而 200 000 次隨機碰撞中，兩個速度之間的夾角從未達到或超過 $\frac{1}{2}\pi$。

常見錯誤

- 把恢復定律套用於整個速率，而不是沿連心線的分量。
- 忘記 A 的速度的垂直分量保持不變；正是這一點才令 A 發生偏轉。
- 對反正切函數求導來直接求 ϕ 的最大值；改用 $\tan\phi$（因為 ϕ 是銳角，這樣做是合理的）會簡潔得多。

STEP 之外

這裏的分解方法，其實就是牛頓第二定律（Newton's second law）的衝量形式：衝量只會在其作用的方向上改變動量。在彈性碰撞的情況下，直角這個結果是一個巧妙的參考

系（frame of reference）論證的特例：在質心參考系（centre-of-mass frame）中，彈性碰撞保持每個球的速率不變，只改變其方向，而變換回實驗室參考系（lab frame）後，便一次過得出所有可能的結果。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）正是這樣在質心參考系中處理碰撞的。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。