詳細解答

STEP III 1988，第 11 題

力學 • 涉及摩擦力的梯子平衡

STEP III 1988，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/88-s3-q11

關鍵思路

先弄清幾何關係：地面、斜坡和梯子構成一個三角形，它的各個角你其實已經知道，由此便可判斷光滑斜坡對梯頂的推力朝哪個方向。之後就是處理梯子問題的標準步驟：分解（resolve）兩次，對梯腳取力矩（moments），再把所需的摩擦力（friction）與 μ 乘以法向反作用力（normal reaction）作比較。由於工人的位置只出現在力矩方程之中，一條通用公式便可同時回答兩部分。

解答

準備工作

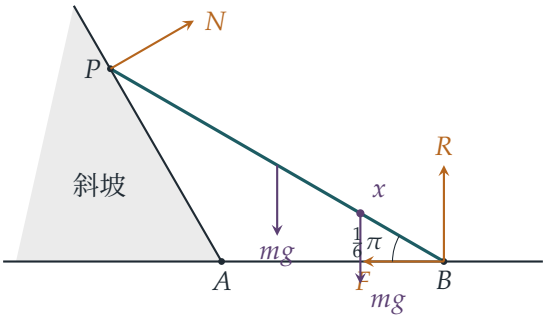
把梯子視為均勻桿（uniform rod），把工人視為質點（particle）。設 A 為斜坡的底端，B 為梯腳，P 為梯頂，梯頂位於斜坡上。

*幾何關係。*在三角形 ABP 中，B 處的角為 $\frac{1}{6}\pi$（即梯子的傾角）。斜坡與鉛垂線成 $\frac{1}{6}\pi$，所以它在 A 的另一側與水平線成 $\frac{1}{3}\pi$。因此三角形內 A 處的角為 $\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$，餘下 $\frac{1}{6}\pi$ 便是 P 處的角。所以這是一個等腰三角形（isosceles triangle），$AP = AB$，而由正弦定理（sine rule）可得

$$AB = \frac{l \sin \frac{1}{6}\pi}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{l}{\sqrt{3}},$$

與題目給出的距離吻合。題目的數據互相一致，P 的確在斜坡上。

*斜坡反作用力的方向。*斜坡是光滑（smooth）的，所以它對梯子的反作用力 N 垂直於斜坡。斜坡與水平線成 $\frac{1}{3}\pi$，故其法線與水平線成 $\frac{1}{6}\pi$，指向斜上方並離開斜坡，朝着 B 的一方。因此 N 的水平分量為 $\frac{\sqrt{3}}{2}N$，把梯子推離斜坡；鉛垂分量為 $\frac{1}{2}N$，方向向上。



方程。設工人沿梯子向上距離梯腳 x。在 B 處，地面施加向上的法向反作用力 R，以及沿水平方向指向斜坡的摩擦力 F（除此之外唯一的水平力是 N 的分量，它把梯腳推離斜坡，所以摩擦力必須與之相反）。這裏的距離是由 B 起計。

沿水平和鉛垂方向分解：

$$F = \tfrac{\sqrt{3}}{2}N, \qquad\qquad R + \tfrac{1}{2}N = 2mg.$$

對 B 取力矩，這樣 R 和 F 便不會出現。由 B 到梯子上距離梯腳 s 的一點，水平距離為 $s\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}s$。$N$ 的作用線與水平線成 $\frac{1}{6}\pi$，而 BP 則在水平線的另一側與之成 $\frac{1}{6}\pi$，所以 N 與梯子的夾角為 $\frac{1}{3}\pi$。它對 B 的力矩是 $Nl\sin\frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}Nl$。因此

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2}Nl = mg\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{l}{2} + mg\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}x \quad\Longrightarrow\quad N = mg\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{l}\right).$$

想一想 為甚麼 N 的力矩會這樣簡單？

由 B 到 N 的作用線的垂直距離是 $l\sin\frac{1}{3}\pi$，因為 N 與梯子相交的角度是 $\frac{1}{3}\pi$。又或者把 N 分解成分量：水平部分 $\frac{\sqrt{3}}{2}N$ 作用於高度 $\frac{1}{2}l$ 處，鉛垂部分 $\frac{1}{2}N$ 作用於水平距離 $\frac{\sqrt{3}}{2}l$ 處。兩者的力矩都是 $\frac{\sqrt{3}}{4}Nl$，加起來就是 $\frac{\sqrt{3}}{2}Nl$。

於是當 $R = 2mg - \frac{1}{2}N = mg\left(\frac{7}{4} - \frac{x}{2l}\right) > 0$ 對 $0 \le x \le l$ 成立，梯腳便一直留在地面上。只要 $F \le \mu R$，梯子就不會滑動，即

$$\mu \ge \frac{F}{R} = \frac{\sqrt{3}\,N}{4mg - N} = \frac{\sqrt{3}\,(l+2x)}{7l-2x}.$$

這個比值隨 x 增加而增加：分子增加，而恆為正數的分母減少。所以工人愈往上爬，所需的摩擦力便愈大。

第 (i) 部分

工人一到達梯子的中點，梯子便滑動。所以極限摩擦（limiting friction）恰好在 $x = \frac{1}{2}l$ 時出現，而由於 F/R 隨 x 遞增，在此之前不會出現。這時 $N = mg$、$F = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$ 及

$R = \frac{3}{2}mg$，所以

$$\mu = \frac{F}{R} = \frac{\sqrt{3}/2}{3/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

第 (ii) 部分

若 $F \le \mu R$ 對每一個 $x \in [0, l]$ 都成立，工人便能到達梯頂。由於 F/R 隨 x 遞增，最壞的情況是 $x = l$。這時 $N = \frac{3}{2}mg$、$F = \frac{3\sqrt{3}}{4}mg$ 及 $R = \frac{5}{4}mg$，所以摩擦系數（coefficient of friction）的最小值為

$$\mu = \frac{3\sqrt{3}/4}{5/4} = \frac{3\sqrt{3}}{5} \approx 1.04.$$

驗算

- 梯上無人時（$x = 0$），公式給出 $\mu \ge \sqrt{3}/7 \approx 0.247$。這比兩個答案都小，正合預期。
- 把 $l = 1$、$m = 1$、$g = 9.8$ 代入三條平衡方程作數值計算，並把各個力寫成向量，可重現 $N/mg = 1$ 和 $\frac{3}{2}$，以及比值 $F/R = 0.57735\ldots$ 和 $1.03923\ldots$。計算亦確認，在梯子上的 101 個位置，F/R 都是遞增的。

常見錯誤

- 把斜坡的反作用力當作水平方向，就像處理鉛垂牆壁那樣。這裏它向水平線上方傾斜了 $\frac{1}{6}\pi$，而它向上的分量會令 R 減小。
- 沿鉛垂方向分解時忘記了工人的重量，結果寫成 $R + \frac{1}{2}N = mg$ 而不是 $2mg$。

STEP 之外

第 (ii) 部分其實是對各種配置所作的一個小型最優化（optimisation）：你需要找出負載在所有位置之中 F/R 的最壞情況。工程師正是這樣找出結構的臨界負載情況。要想像條件 $F \le \mu R$，一個有用的方法是摩擦錐（cone of friction）：地面的總反作用力必須落在與法線成 $\arctan\mu$ 的角度之內，而當所需的反作用力離開這個錐的一刻，梯子便會滑動。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對剛體靜力學和摩擦有仔細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。