詳細解答

# STEP III 1988，第 10 題

純數學 • 追蹤曲線

> **STEP III 1988，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q10

本題在 *Beyond STEP* 第 8.5 節格力犬追逐格力犬中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch08/pursuit.html

## 關鍵思路

不要嘗試分別追蹤四隻移動中的狗。整個設定繞中心旋轉四分之一圈後維持不變，所以四隻狗始終位於一個以 $O$ 為中心的正方形的四個頂點上：這個正方形會縮小、會旋轉，但始終是正方形。這就確定了 $A$ 的速度與直線 $AO$ 之間的夾角，而速度與半徑之間的夾角固定，正正就是產生等角螺線（equiangular spiral）$r = \lambda \mathrm{e}^{-k\theta}$ 的條件。

## 解答

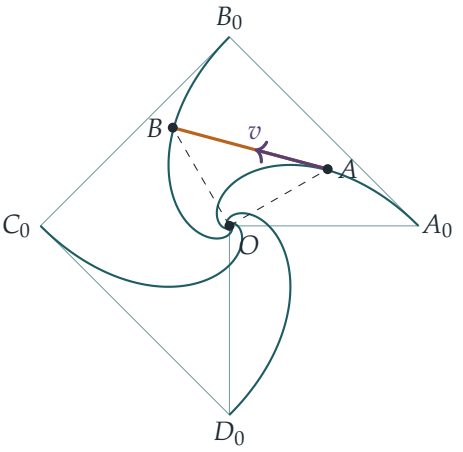
### 四隻狗始終位於正方形上

取正方形的中心為原點 $O$，並按逆時針方向為四隻狗編號，使得 $B$ 位於 $A$ 逆時針旋轉四分之一圈之處，$C$ 位於 $B$ 逆時針旋轉四分之一圈之處，如此類推。

把整幅圖繞 $O$ 旋轉 $\frac{\pi}{2}$。$A, B, C, D$ 的起始位置分別變成 $B, C, D, A$ 的起始位置，而「以速率 $v$ 直奔下一隻狗」這條規則對每隻狗都是一樣的。所以旋轉後的運動，同樣是由相同的起始佈局出發、遵從相同規則的運動。由給定起點出發的運動是唯一的（只要四隻狗尚未相遇，速度就是位置的光滑函數），所以旋轉後的運動就是實際的運動。換言之，在每一瞬間，$B$ 的位置就是 $A$ 的位置繞 $O$ 旋轉 $\frac{\pi}{2}$ 所得的位置。$C$ 和 $D$ 亦然。所以 $ABCD$ 始終是一個以 $O$ 為中心的正方形。

### 速度與半徑之間的夾角

設 $A$ 在極坐標（polar coordinates）中位於 $(r,\theta)$。那麼 $B$ 位於 $(r,\theta+\frac{\pi}{2})$，所以 $OA=OB=r$，而 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$。三角形 $OAB$ 是等腰直角三角形，所以 $\angle OAB=\frac{\pi}{4}$。




圖中顯示四條路徑由起始頂點 $A_0, B_0, C_0, D_0$ 向內盤旋，並標出某一瞬間 $A$ 和 $B$ 兩隻狗的位置。$A$ 的速度（紫紅色）沿 $AB$ 方向。

$A$ 的速度大小為 $v$，方向沿 $AB$，與向內的半徑 $AO$ 成 $\frac{\pi}{4}$ 角。把它分解為徑向分量(radial component，以向外為正）和橫向分量（transverse component，沿 $\theta$ 增加的方向）：

$$\dot{r}=-v\cos\frac{\pi}{4},\qquad r\dot{\theta}=v\sin\frac{\pi}{4}.$$

橫向分量為正，是因為 $B$ 位於 $A$ 的逆時針方向，所以 $A$ 被拉着逆時針轉動。

> ? **想一想** 為甚麼可以把這兩條方程相除？

由於四隻狗尚未相遇時 $r\dot{\theta}=v/\sqrt{2}>0$，$\theta$ 隨時間嚴格遞增。所以我們可以用 $\theta$ 代替 $t$ 作為路徑上的參數，再由鏈式法則（chain rule）得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}=\frac{-v/\sqrt{2}}{v/(\sqrt{2}r)}=-r.$$

### 求出路徑

由於 $r>0$，我們可以分離變數（separate variables）：$\int\frac{\mathrm{d}r}{r}=-\int\mathrm{d}\theta$，所以 $\ln r=-\theta+c$，即

$$r=\lambda\mathrm{e}^{-\theta}$$

其中 $\lambda=\mathrm{e}^{c}$ 是常數。這就是所求的結果。如果我們選取 $OA_0$ 為始線，使得開始時 $\theta=0$，那麼 $\lambda$ 就是 $A$ 與 $O$ 的初始距離，對於邊長為 $a$ 的正方形，即 $a/\sqrt{2}$。若選取其他始

線，$\lambda$ 只會相差一個常數因子。（如果我們按順時針方向為四隻狗編號，則以順時針方向量度 $\theta$ 便會得到相同的方程。）

### 推廣至 $n$ 隻狗

對於位於正 $n$ 邊形各頂點上的 $n$ 隻狗（按逆時針方向編號，每隻追逐下一隻），把旋轉角改為 $\frac{2\pi}{n}$，同樣的論證依然成立。這些狗始終構成一個以 $O$ 為中心的正 $n$ 邊形。所以若 $A$ 位於 $(r,\theta)$，下一隻狗 $B$ 就位於 $(r,\theta+\frac{2\pi}{n})$。

三角形 $OAB$ 是等腰三角形，頂角為 $\frac{2\pi}{n}$，所以每個底角為

$$\angle OAB = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}.$$

如前分解 $A$ 的速度，

$$\dot{r} = -v\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right) = -v\sin\frac{\pi}{n}, \qquad r\dot{\theta} = v\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right) = v\cos\frac{\pi}{n}.$$

由於 $n \geq 3$，$\cos\frac{\pi}{n} > 0$，所以 $\theta$ 同樣穩步遞增，並且

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -r\tan\frac{\pi}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad r = \lambda\,\mathrm{e}^{-\theta\tan(\pi/n)}.$$

當 $n=4$ 時，$\tan\frac{\pi}{4}=1$，我們重新得到 $r=\lambda\mathrm{e}^{-\theta}$。每隻狗都沿着一條等角螺線（又稱對數螺線，logarithmic spiral）前進，以固定的角 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$ 與每條半徑相交。

一個有趣的副產品：$\dot{r} = -v\sin\frac{\pi}{n}$ 是常數，所以這些狗在時間 $r_0/(v\sin\frac{\pi}{n})$ 之後於 $O$ 相遇，其中 $r_0$ 是與 $O$ 的初始距離。在這段時間內，每隻狗跑過的距離是有限的 $r_0/\sin\frac{\pi}{n}$，儘管 $\theta\to\infty$，牠繞着 $O$ 轉了無限多圈。（對於正方形，這個距離是 $a$，即邊長。）

## 驗算

- 當 $n=4$ 時，結果就是一般公式在 $\tan\frac{\pi}{4}=1$ 時的特殊情況。
- 當 $n\to\infty$ 時，$\tan\frac{\pi}{n}\to 0$，路徑趨向一個圓：每隻狗所追逐的鄰居，在圓上幾乎與牠並排。
- 我們以數值方法模擬了這場追逐（用 RK4 方法，取 $n=3,4,5,6,8$ 隻狗，由半徑 1 出發）。算出的 $r$ 與 $\mathrm{e}^{-\theta\tan(\pi/n)}$ 吻合，相對誤差為 $10^{-11}$。當 $n=4$ 時，到達 $r=0.02$ 所需的時間和路徑長度均算得 $1.386 = 0.98\sqrt{2}$，與 $(1-0.02)/\sin\frac{\pi}{4}$ 所預測的一致。

## 常見錯誤

- 未先論證這些狗始終位於正多邊形上，就直接寫下 $\dot{r}$ 和 $r\dot{\theta}$。正是靠對稱性論證，我們才知道 $A$ 處的角。

- 用了多邊形的內角（正方形為 $\frac{\pi}{2}$），而不是 $AB$ 與半徑 $AO$ 之間的夾角（$\frac{\pi}{4}$）。
- 忘記了橫向速度分量是 $r\dot{\theta}$，而不是 $\dot{\theta}$。

## STEP 之外

這是一道經典的追逐問題（pursuit problem）。對稱性那一步，是微分方程（differential equations）中一個普遍原理的例子：如果方程和初始數據在某個對稱變換下都保持不變，那麼解的唯一性就迫使解本身也保持不變。與每條半徑以固定角相交的曲線，就是等角螺線。以複數形式表示，它們是 $z = \mathrm{e}^{(-k+\mathrm{i})\theta}$，所以整個運動是平面上一個連續的「旋轉相似變換」（spiral similarity）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以幾何觀點講解複分析）闡述了這種幾何觀點，而 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）則涵蓋了解的存在性與唯一性。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。